উচ্চ-মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত

(Higher Secondary Elective Mathematics)

একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রেসিডেন্সী কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক
শ্রীভূপেন্দ্র চন্দ্র দাস, এম্. এস্-সি.
ও
স্কটিশচার্চ কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক
শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়, এম্.-এ.
প্রেমচাঁদ রায়চাঁদ স্কলার
প্রণীত

২৫শে বৈশাখ, ১৩৬৭

(পর্ষতের পরিবর্তিত পাঠ্যসূচী-অনুসারে রচিত)

ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ
১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা ১২

উচ্চ-মাধ্যমিক বীজগণিত

(একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশ)

REVISED SYLLABUS OF HIGHER SECONDARY ELECTIVE MATHEMATICS : ALGEBRA

(Course for Class XI)

The Remainder Theorem ; Divisibility (Factor Theorem) ; Harder Factors ; Laws of Indices (formal proofs for fractional and negative indices are being required) ; Involutions and Evolutions ; Theory of Quadratic Equations and Expressions ; Permutation and Combination ; Binomial Theorem for positive integral index.

Elementary idea of an infinite series in connection with infinite geometric series ; The use of the expansion of $(1+x)^n$ where n is fractional or negative (proof of the establishment of this expansion is not required but the restriction on the value of x should be known).

একাদশ শ্রেণীর সূচীপত্র

মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত—বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা ও বিভাজ্যতা

(Remainder Theorem and Divisibility)

1·1. সংজ্ঞা।

গণিতে অনেক সময় আমাদিগকে বীজগণিতীয় অক্ষর-সংবলিত রাশিমালা ব্যবহার করিতে হয়। এই অক্ষরগুলি সংখ্যা নির্দেশ করে। কতক ক্ষেত্রে এই সংখ্যাগুলির মান নির্দিষ্ট বা অপরিবর্তনীয়। আবার, কতক ক্ষেত্রে ইহাদের মান পরিবর্তনশীল, অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা হইতে পারে। উদহরণস্বরূপ, আমরা যদি r অক্ষর দ্বারা কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দেশ করি, তবে πr^2 [illegible]। এখানে ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের ক্ষেত্রে r-এর মান ভিন্ন ভিন্ন, কিন্তু π একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা। এই সূত্রে নিম্নে কতকগুলি সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

চল (Variable) :

যে সকল রাশির মান গাণিতিক কার্যকলাপে পরিবর্তিত হয় এবং যাহা ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা দ্বারা সূচিত করা যায়, সেই সকল রাশিকে চলরাশি বা সংক্ষেপে **'চল'** (variable) বলে। চলরাশিকে সাধারণতঃ ইংরাজী বর্ণমালার শেষের অক্ষর x, y, z প্রভৃতির দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ধ্রুবক (Constant) :

আবার, যে সকল রাশির মান গাণিতিক কার্যকলাপে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যায় নিবদ্ধ থাকে এবং উহার কোন পরিবর্তন ঘটে না, সেই সকল রাশিকে **'ধ্রুবক'** (constant) বলে। নির্দিষ্ট সংখ্যা ব্যতীত অন্যান্য ধ্রুবকরাশি সাধারণতঃ ইংরাজী বর্ণমালার আদ্যক্ষর a, b, c, ··· প্রভৃতি দ্বারা নির্দেশ করা হইয়া থাকে।

অপেক্ষক (Function)

x, y, ··· প্রভৃতি এক বা একাধিক চলরাশি-নির্দেশক অক্ষরযুক্ত রাশিমালাকে ঐ চল বা চলগুলির **অপেক্ষক** (funetion) বলে। বলা বাহুল্য, প্রত্যেক

অপেক্ষকের মান উহার অন্তর্গত চল বা চলগুলির উপর নির্ভরশীল। যথা, $5x^3-3x^2+7x-2$ রাশিমালা x-এর অপেক্ষক এবং $3x^2-7xy+5y^2$ রাশিমালা x এবং y-এর অপেক্ষক।

একটিমাত্র চল x-এর অপেক্ষককে $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ প্রভৃতি যে কোন একটি চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। অনুরূপভাবে, x, y-এর অপেক্ষককে $f(x, y)$, $F(x, y)$, $\phi(x,y)$ প্রভৃতি চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়। যথা,

$$f(x)=3x^2+2x+1$$
$$F(x, y)=4x^3+3x^2y-2xy^2+y^3-5 \text{ ইত্যাদি।}$$

x-চলের যদি আমরা কোন নির্দিষ্ট মান দিই, ধর 2, তবে x-এর উপর নির্ভরশীল কোন অপেক্ষক $f(x)$-এর অনুরূপ মান সাধারণতঃ $f(x)$ অপেক্ষকে x-এর পরিবর্তে 2 বসাইলে পাওয়া যাইবে, এবং অপেক্ষকের এই মান সংক্ষেপে $f(2)$ দ্বারা সূচিত হয়।

যদি $f(x)=ax^2+bx+c$ হয়,
তবে $f(2)=a.2^2+b.2+c=4a+2b+c$ হইবে
এবং $f(a)=aa^2+ba+c$ হইবে।

মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক (Rational and Integral Algebraic Function or Polynomial):

কোন চলরাশির অপেক্ষকের বিভিন্ন পদে চলরাশির ঘাতের সূচকগুলি যদি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা (positive integer) হয় (বিভিন্ন পদে ধ্রুবক সহগ অবশ্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইতে পারে), তবে সেই অপেক্ষককে চলরাশিটির **মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক** (rational and integral algebraic function, বা polynomial) বলে।

উদাহরণস্বরূপ, $3x^2-7x+8$, $8x^7-6x^5+23x^2-9x+5$, $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, ইত্যাদি রাশিমালা x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক। শেষোক্ত রাশিমালায় n অবশ্য অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা, এবং a_1, $a_2,\cdots$ প্রভৃতি সহগগুলি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবক নির্দেশ করে। ইহাই x-এর মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকের সাধারণ রূপ।

1·2. x চলরাশির কোন এক মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে $x-a$ এই দ্বিপদরাশি দ্বারা ভাগ করিয়া অতীব প্রয়োজনীয় এক তথ্য পাই। প্রথমে

আমরা x চলরাশির কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক px^3+qx^2+rx+s কে $x-a$ দ্বারা সাধারণ প্রণালীতে ভাগ করি।

$$\begin{array}{l} x-a)\ px^3+qx^2+rx+s\ (\ px^2+(ap+q)x+(pa^2+qa+r) \\ \quad\quad\ \underline{px^3-apx^2} \\ \quad\quad\ (ap+q)x^2+rx \\ \quad\quad\ \underline{(ap+q)x^2-a(ap+q)x} \\ \quad\quad\ (pa^2+qa+r)x+s \\ \quad\quad\ \underline{(pa^2+qa+r)x-a(pa^2+qa+r)} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad pa^3+qa^2+ra+s \end{array}$$

এখানে লক্ষণীয় যে ভাজ্য 'x'-এর যে অপেক্ষক, ভাগশেষ 'a'-এর সেই অপেক্ষক এবং ভাগকার্য না করিয়া ভাজ্যে শুধু x চলের পরিবর্তে a বসাইয়া আমরা x-নিরপেক্ষ এই ভাগশেষ নির্ণয় করিতে পারি। অর্থাৎ $f(x)$ যদি x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক হয়, তবে $f(x)$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ $f(a)$ হইবে। ভাজ্য x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক এবং ভাজক $x-a$ আকারের হইলে ভাগশেষ নির্ণয়ে এই নিয়ম সকল সময়েই প্রযোজ্য। বিশদরূপে এই প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিবার পূর্বে আমরা কয়েকটি মূলদ অখণ্ড x-অপেক্ষককে $x-a$ আকারের ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া এই নিয়মের সত্যতা প্রতিপন্ন করিব।

$5x^2-7x+10$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে উপরোক্ত নিয়মে ভাগশেষ $=5.2^2-7.2+10=16$ এবং সাধারণ প্রণালীতে $5x^2-7x+10$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করিলে আমরা একই ভাগশেষ 16 পাই।

$$\begin{array}{l} x-2)\ 5x^2-7x+10\ (\ 5x+3 \\ \quad\quad\ \underline{5x^2-10x} \\ \quad\quad\quad\quad 3x+10 \\ \quad\quad\quad\quad \underline{3x-\ \ 6} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\ \ 16 \end{array}$$

আবার, $3x^3+7x^2-2x+3$ কে $x+3$ দ্বারা ভাগ করিলে, যেহেতু $x+3=x-(-3)$, অতএব পূর্বোক্ত নিয়মানুসারে ভাগশেষ হওয়া উচিত

$$\begin{aligned} & 3(-3)^3+7.(-3)^2-2.(-3)+3 \\ & =-81+63+6+3=-9\,; \end{aligned}$$

এবং সাধারণ প্রণালীতে ভাগ করিয়া আমরা একই ভাগশেষ -9 পাই।

$$\begin{array}{l} x+3)\ 3x^3+7x^2-2x+3\ (\ 3x^2-2x+4 \\ \qquad\quad 3x^3+9x^2 \\ \qquad\quad -2x^2-2x \\ \qquad\quad -2x^2-6x \\ \qquad\qquad\quad 4x+\ 3 \\ \qquad\qquad\quad 4x+12 \\ \qquad\qquad\qquad -9 \end{array}$$

উপরের প্রদর্শিত কার্যাবলী হইতে আমরা অতিপ্রয়োজনীয় ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা পাই। এক্ষণে আমরা তাহার আলোচনা করিব।

1·3. ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা (Remainder Theorem).

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে x − a দ্বারা ভাগ করিলে ভাজ্যে অর্থাৎ ঐ অপেক্ষকে x-এর স্থলে a লিখিলে অপেক্ষকের যে মান পাওয়া যায়, তাহাই ভাগশেষ হইবে।

অর্থাৎ x-চলের একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষক

$f(x)\equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ কে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ হইবে

$$f(a)\equiv p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots+p_{n-1}a+p_n.$$

প্রমাণ। প্রদত্ত x-অপেক্ষককে $x-a$ দ্বারা ভাগ কর যতক্ষণ না x-নিরপেক্ষ একটি ভাগশেষ পাওয়া যায়।

মনে কর, Q ভাগফল এবং R, x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ।

তাহা হইলে

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n\equiv Q(x-a)+R.$$

যেহেতু, ইহা একটি অভেদ, ইহাতে x-এর যে-কোন মান বসাইলে ইহা সিদ্ধ হইবে।

সুতরাং, এই অভেদে $x=a$ এই মান বসাইলে

$$p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\ \cdots\cdots\ +p_{n-1}a+p_n=Q\times 0+R=R,$$

যেহেতু ভাগশেষ R x-বর্জিত।

ইহা হইতে প্রতীয়মান হয় যে, x-সংবলিত কোন মূলদ অখণ্ড রাশিমালাকে $x-a$ দ্বারা ভাগ করিলে, প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে a লিখিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ সহজেই পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষককে $px+q$ জাতীয় দ্বিপদরাশি ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ নির্ণয় করিতে হইলে, $px+q=0$ করিয়া x-এর যে মান $-q/p$ পাওয়া যায়, প্রদত্ত অপেক্ষকে x-এর পরিবর্তে সেই মান বসাইলে x-নিরপেক্ষ নির্ণেয় ভাগশেষ পাওয়া যাইবে।

[প্রমাণ ঠিক উপরের ন্যায়।]

আবার, প্রদত্ত রাশিমালা $f(x)$, $x-a$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইলে ভাগশেষ অর্থাৎ $f(a)$ '0' শূন্য হইবে। এই ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা হইতে আমরা নিম্নলিখিত অপর একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা পাই।

1·4. বিভাজ্যতা বা গুণনীয়ক উপপাদ্য (Divisibility or Factor Theorem).

x-এর কোন মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকে x-এর মান a ধরিলে যদি অপেক্ষকের মান 0 [শূন্য] হয়, তবে x − a ঐ অপেক্ষকের একটি গুণনীয়ক হইবে অর্থাৎ অপেক্ষকটি x − a দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $5x^3-3x^2-11x-6$ রাশিমালা $x-2$ দ্বারা বিভাজ্য, কারণ, ঐ রাশিমালায় $x=2$ বসাইয়া নির্ণেয় ভাগশেষ

$$5.2^3-3.2^2-11.2-6=0.$$

সাধারণভাবে ভাগ করিয়াও ইহার সত্যতা প্রমাণ করা যায়। ঐরূপ, $x^4-8x^3-33x^2+8x+24$এর $x+3$ একটি উৎপাদক হইবে, কারণ, $x=-3$ [$x+3=0$ ধরিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে এই রাশিমালার মান

$$(-3)^4-8(-3)^3-33(-3)^2+8(-3)+24=0.$$

কিংবা, $6x^3-7x^2-10x+21$, $2x+3$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য, কারণ, $x=-\frac{3}{2}$ [$2x+3=0$ ধরিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে $6x^3-7x^2-10x+21$এর মান $6(-\frac{3}{2})^3-7(-\frac{3}{2})^2-10(-\frac{3}{2})+21=0$ হয়।

নিম্নে গুণনীয়ক উপপাদ্য হইতে সহজে প্রাপ্ত বীজগণিতের কয়েকটি অতি প্রয়োজনীয় ফলাফল প্রদত্ত হইল।

1·5. (A) n যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (*positive integer*) **হইলে x^n-y^n সর্বদাই $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।**

কারণ, $x^n - y^n$ রাশিমালাতে x এর মান $= y$ বসাইলে,

$$x^n - y^n = y^n - y^n = 0.$$

n এর মান যে-কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে ইহা সর্বদাই সত্য।

বস্তুতঃ,

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

ইহা সহজেই $x^n - y^n$ কে $x - y$ দ্বারা ভাগ করিয়া, অথবা দক্ষিণপক্ষ সরল করিয়া প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y),\ x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2);$$
$$x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3),$$ ইত্যাদি।

(B) n যে-কোন ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা (*even positive integer*) **হইলে $x^n - y^n$ সর্বদাই $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।**

কারণ, $x = -y$ [$x + y = 0$ হইতে প্রাপ্ত] বসাইলে $x^n - y^n$ এর মান $= (-y)^n - y^n = y^n - y^n = 0$, যদি n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হয়।

বস্তুতঃ এক্ষেত্রে

$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

দক্ষিণ পক্ষ সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y),$$
$$x^4 - y^4 = (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য। n অযুগ্ম (*odd*) হইলে, $(-y)^n - y^n$
$= -y^n - y^n \neq 0.$

অতএব, এক্ষেত্রে $x^n - y^n$, $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

যথা, $x^3 - y^3$ অথবা $x^5 - y^5$ ইত্যাদি $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

(C) n কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

(i) যখন n অযুগ্ম (*odd*), $x^n + y^n$ এর $x + y$ উৎপাদক হইবে;

(ii) যখন n যুগ্ম (*Even*), x^n+y^n রাশিমালা $x+y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

কারণ, $x=-y$ [$x+y=0$ করিয়া প্রাপ্ত] বসাইলে

x^n+y^n এর মান $=(-y)^n+y^n$

n অযুগ্ম হইলে ইহা $=-y^n+y^n=0.$

কিন্তু n যুগ্ম হইলে $(-y)^n+y^n=y^n+y^n\neq 0.$

বস্তুতঃ, n অযুগ্ম হইলে

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

দক্ষিণ পক্ষ সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ,

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$ ইত্যাদি।

(D) n যে-কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হউক না কেন, x^n+y^n কোন ক্ষেত্রেই $x-y$ দ্বারা বিভাজ্য নয়।

কারণ, $x=y$ বসাইলে, $x^n+y^n=y^n+y^n\neq 0.$

1·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If* $f(x)=6x^2-5x+1$, *find* $f(0)$, $f(-2)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-x)$ *and* $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

এক্ষেত্রে x এর মান বসাইয়া

$$f(0)=6.0^2-5.0+1=1.$$

$$f(-2)=6.(-2)^2-5(-2)+1=35.$$

$$f(\tfrac{1}{2})=6.(\tfrac{1}{2})^2-5(\tfrac{1}{2})+1=0.$$

$$f(-x)=6.(-x)^2-5(-x)+1=6x^2+5x+1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=6\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+1=\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+1$$

$$=\frac{6-5x+x^2}{x^2}\ \text{i.e.}\ \frac{x^2-5x+6}{x^2}.$$

Ex. 2. *If* $f(x)=b\cdot\frac{x-a}{b-a}+a\cdot\frac{x-b}{a-b}$, *show that*

$$f(a)+f(b)=f(a+b).$$

এখানে x এর মান বসাইয়া,

$$f(a)=b\cdot\frac{a-a}{b-a}+a\cdot\frac{a-b}{a-b}=a,$$

$$f(b)=b\cdot\frac{b-a}{b-a}+a\cdot\frac{b-b}{a-b}=b,$$

এবং $f(a+b)=b\cdot\frac{a+b-a}{b-a}+a\cdot\frac{a+b-b}{a-b}$

$$=\frac{b^2}{b-a}+\frac{a^2}{a-b}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a\cdot$$

$\therefore\quad f(a)+f(b)=f(a+b).$

Ex. 3. *If* $f(x)=3x^2+4x-5$ *and* $F(x)=x+\frac{1}{x}$, *show that*

$$f(1)=F(1).$$

$$f(x)=3x^2+4x-5.\quad\therefore\quad f(1)=3.1^2+4.1-5=2.$$

আবার, $F(x)=x+\frac{1}{x}\cdot\qquad\therefore\quad F(1)=1+1=2.$

$$\therefore\quad f(1)=F(1).$$

Ex. 4. *If* $f(x)=2x^2-3x-2$ *and* $\phi(x)=3x^2-5x+1$, *find the value of* :

(i) $f(0)+\phi(0)$, (ii) $f(1)-\phi(-2)$ *and* (iii) $\phi(x+1)-f(x-1)$.

$f(x)=2x^2-3x-2$ এবং $\phi(x)=3x^2-5x+1$.

সুতরাং, (i) $f(0)+\phi(0)=2.0^2-3.0-2+3.0^2-5.0+1$

$$=-2+1=-1.$$

(ii) $f(1)-\phi(-2)=2.1^2-3.1-2-\{3(-2^2)-5.(-2)+1\}$

$$=2-3-2-(12+10+1)$$

$$=-3-23=-26.$$

(iii) $\phi(x+1)-f(x-1)$

$$=3(x+1)^2-5(x+1)+1-\{2(x-1)^2-3(x-1)-2\}$$

$$=3(x^2+2x+1)-5x-5+1-\{2(x^2-2x+1)-3x+3-2\}$$
$$=3x^2+6x+3-5x-5+1-2x^2+4x-2+3x-3+2$$
$$=x^2+8x-4.$$

Ex. 5. *If* $f(x, y)=\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$ *when* $x \neq y$, *and* $f(x, y)=x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$ *when* $x=y$*, *show that*

$$f(a, a)=5f(a, -a).$$

এক্ষেত্রে, $f(a, -a)=\dfrac{a^5-(-a)^5}{a-(-a)}=\dfrac{a^5+a^5}{a+a}=\dfrac{2a^5}{2a}=a^4,$

এবং যখন $x=a$, $y=a$, অর্থাৎ $x=y$, তখন প্রদত্ত সংজ্ঞানুসারে

$$f(a, a)=a^5+a^3.a+a^2.a^2+a.a^3+a^4=5a^4.$$
$$\therefore \quad f(a, a)=5f(a, -a).$$

Ex. 6. *If* $x-p$ *be the H. C. F. of* x^2+ax+b *and* $x^2+a'x+b'$, *show that* $p=\dfrac{b'-b}{a-a'}$.

যদি $x-p$, x^2+ax+b এবং $x^2+a'x+b'$ উভয় রাশিমালার গ. সা. গু. হয়, তবে উভয় রাশিমালাই $x-p$ দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

$\therefore \quad p^2+ap+b=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (i)

এবং $\quad p^2+a'p+b'=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া $(a-a')p+b-b'=0$

$$\therefore \quad p=\frac{b'-b}{a-a'}.$$

Ex. 7. *If* $4x^3-3x^2-24x-9$ *and* $8x^3-2x^2-53x-c$ *leave the same remainder when divided by* $x-3$, *find the value of* c.

ভাগশেষ-প্রতিজ্ঞা অনুসারে, $4x^3-3x^2-24x-9$ কে $x-3$ দ্বারা ভাগ করিলে, x-নিরপেক্ষ ভাগশেষ

$$=4.3^3-3.3^2-24.3-9=0\ ;$$

* ইহা লক্ষণীয় যে, যখন $x=y$, তখন $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$ এর মান হয় $\dfrac{0}{0}$, এবং ইহা অর্থহীন ; অতএব, সেক্ষেত্রে $f(x, y)=\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$ সংজ্ঞা দেওয়া যায় না।

আবার, $8x^3 - 2x^2 - 53x - c$ কে $x - 3$ দ্বারা ভাগ করিলে

$$\text{ভাগশেষ} = 8.3^3 - 2.3^2 - 53.3 - c = 39 - c$$

$\therefore$ উভয় ক্ষেত্রে ভাগশেষ সমান হইলে,

$$39 - c = 0. \quad \therefore \quad c = 39.$$

Ex. 8. *If n be a positive integer, show that $4^{5n} - 5^{4n}$ is always divisible by 3, 7 and 19, and by 17 and 97 when n is an even positive integer.*

$$4^{5n} - 5^{4n} = (4^5)^n - (5^4)^n = 1024^n - 625^n.$$

আমরা জানি $1024^n - 625^n$ সর্বদা $1024 - 625$ অর্থাৎ 399 দ্বারা বিভাজ্য।

এক্ষণে, $399 = 3.7.19$.

$\therefore$ $4^{5n} - 5^{4n}$ সতত 3, 7 এবং 19 দ্বারা বিভাজ্য।

n ধনাত্মক যুগ্মরাশি হইলে, $x^n - y^n$, $x + y$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ n ধনাত্মক যুগ্মরাশি হইলে

$4^{5n} - 5^{4n}$ অর্থাৎ $1024^n - 625^n$, $1024 + 625$ অর্থাৎ 1649 দ্বারা বিভাজ্য। কিন্তু, $1649 = 17.97$.

$\therefore$ n একটি ধনাত্মক যুগ্মসংখ্যা হইলে $4^{5n} - 5^{4n}$, 17 এবং 97 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 9. *Find the continued product of* 11, 101 *and* 10001.

মনে কর, $P = 11 \times 101 \times 10001$.

$$\therefore \quad (10 - 1)P = (10 - 1) \times (10 + 1) \times (100 + 1)(10000 + 1)$$
$$= (10^2 - 1) \times (10^2 + 1) \times (10^4 + 1)$$
$$= (10^4 - 1) \times (10^4 + 1) = 10^8 - 1\ ;$$

অর্থাৎ $9P = 99999999 \quad \therefore \quad P = 11111111$

$$\therefore \quad 11 \times 101 \times 10001 = 11111111.$$

Ex. 10. *If n is a positive integer, show that $1 - x - x^n + x^{n+1}$ is always exactly divisible by $1 - 2x + x^2$.*

এখানে দেখা যায় যে, $x = 1$ বসাইলে (n অখণ্ড ধন-সংখ্যা হইলে) প্রদত্ত রাশিমালার মান হয় $1 - 1 - 1 + 1 = 0$.

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালার $x - 1$ বা $1 - x$ একটি উৎপাদক।

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিমালা $= 1 - x - x^n + x^{n+1}$

$$= (1 - x) - x^n(1 - x) = (1 - x)(1 - x^n).$$

$\therefore$ $(1 - x)$ প্রদত্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক।

আবার, $1 - x^n$ রাশিমালা, n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইলে, $(1 - x)$ দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালা $(1 - x)^2$ অর্থাৎ $1 - 2x + x^2$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য।

Ex. 11. *If* $x^n + py^n + qz^n$ *is exactly divisible by* $x^2 - (ay + bz)x + abyz$, *show that* $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} + 1 = 0$.

$$x^2 - (ay + bz)x + abyz = (x - ay)(x - bz) \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

মনে কর, $x^n + py^n + qz^n = f(x)$. $\quad \cdots \quad$ (ii)

এক্ষণে, $f(x)$, $x^2 - (ay + bz)x + abyz$ অর্থাৎ $(x - ay((x - bz)$ দ্বারা বিভাজ্য। $\therefore$ $f(ay) = 0$.

সুতরাং, (ii) হইতে $a^n y^n + py^n + qz^n = 0$,

বা, $y^n(a^n + p) + qz^n = 0$, বা, $\frac{y^n}{z^n} = -\frac{q}{a^n + p}$. $\quad \cdots \quad$ (iii)

আবার, $f(bz) = 0$, [$\because$ (ii), (i) দ্বারা বিভাজ্য]

সুতরাং (ii) হইতে, $b^n z^n + py^n + qz^n = 0$,

বা $z^n(b^n + q) + py^n = 0$, বা $\frac{y^n}{z^n} = -\frac{b^n + q}{p}$ $\quad \cdots\cdot \quad$ (iv)

সুতরাং, (iii) ও (iv) হইতে $\frac{q}{a^n + p} = \frac{b^n + q}{p}$,

বা, $(a^n + p)(b^n + q) = pq$,

বা, $pb^n + qa^n + a^n b^n + pq = pq$,

বা $\frac{p}{a^n} + \frac{q}{b^n} + 1 = 0$, [$a^n b^n$ দ্বারা ভাগ করিয়া].

Ex. 12. *Find for what values of* l *and* m *will* $8x^3 + lx^2 - 27x + m$ *be an integral multiple of* $2x^2 - x - 6$ *?*

মনে কর, $f(x) = 8x^3 + lx^2 - 27x + m$.

এক্ষণে, ভাজক $2x^2 - x - 6 = (x-2)(2x+3)$.

$f(x)$, $2x^2 - x - 6$ এর অখণ্ড গুণিতক হইতে হইলে $f(x)$ অবশ্যই $2x^2 - x - 6$ অর্থাৎ $x - 2$ এবং $2x + 3$ উভয়ের দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইবে।

$\therefore$ $f(x)$ কে $x - 2$ এবং $2x + 3$ দ্বারা ভাগ করিলে উভয় ক্ষেত্রেই ভাগশেষ 0 শূন্য হইবে।

(1) $x - 2$ দ্বারা ভাগ করিলে,

ভাগশেষ $= f(2) = 8.2^3 + l.2^2 - 27.2 + m = 0.$

$\therefore \quad 64 + 4l - 54 + m = 0$, বা, $4l + m + 10 = 0. \quad \cdots \quad$ (i)

(2) যেহেতু $2x + 3 = 2(x + \frac{3}{2}) = 2\{x - (-\frac{3}{2})\}$, $f(x)$, $2x + 3$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হইলে ইহা $x - (-\frac{3}{2})$ দ্বারাও বিভাজ্য হইবে।

$\therefore \quad f(-\frac{3}{2}) = 8.(-\frac{3}{2})^3 + l.(-\frac{3}{2})^2 - 27.(-\frac{3}{2}) + m = 0,$

বা, $-27 + \frac{9l}{4} + \frac{81}{2} + m = 0$, বা, $9l + 4m + 54 = 0. \quad \cdots \quad$ (ii)

(i) ও (ii) সমীকরণ সমাধান করিয়া আমরা পাই

$l = 2$ এবং $m = -18$.

Ex. 13. *If a number is divisible by 9, show that the sum of its digits is divisible by 9.*

মনে কর, প্রদত্ত সংখ্যাটি $(n+1)$-সংখ্যক অঙ্কবিশিষ্ট (of $\overline{n+1}$ digits) এবং একক, দশক প্রভৃতি স্থানীয় অঙ্কগুলি যথাক্রমে $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{n-2}, p_{n-1}, p_n$.

তাহা হইলে সংখ্যাটি $p_n 10^n + p_{n-1} 10^{n-1} + p_{n-2} 10^{n-2} + \cdots + p_2.10^2 + p_1.10 + p_0$ এই আকারে লেখা যায়।

$\therefore$ সংখ্যাটিকে আমরা 10 এর অপেক্ষকরূপে মনে করিতে পারি।

ধর, $f(10) = p_n.10^n + p_{n-1}.10^{n-1} + p_{n-2}.10^{n-2} + \cdots + p_2.10 + p_0$

এক্ষণে, $f(10)$ কে 9 অর্থাৎ $(10 - 1)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ হইবে $f(1)$ অর্থাৎ এই রাশিমালাতে 10 এর স্থলে 1 লিখিলে $f(1)$ পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad f(1) = p_n.1^n + p_{n-1}.1^{n-1} + p_{n-2}.1^{n-2} + \cdots + p_2.1^2 + p_1.1 + p_0.$$
$$= p_n + p_{n-1} + p_{n-2} + \cdots + p_2 + p_1 + p_0.$$

এখন $p_0, p_1, p_2, \ldots$ প্রভৃতি অঙ্কগুলির সমষ্টি 0 অথবা 9 দ্বারা বিভাজ্য হইলে প্রদত্ত সংখ্যাটি 9 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

কিন্তু, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ প্রভৃতি অঙ্কগুলির প্রত্যেকটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা। সুতরাং, তাহাদের সমষ্টি কখনও 0 শূন্য হইতে পারে না। অতএব, $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n$, 9 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 14. *If in a polynomial in x, the sum of the coefficients be zero, the polynomial has a factor $(x-1)$. If the sum of the coefficients of odd powers of x be equal to the sum of the coefficients of the even powers of x together with the free term, the polynomial has a factor $(x+1)$.*

x-এর একটি মূলদ অখণ্ড অপেক্ষকের সাধারণ আকার

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

[এখানে 'n' ধনাত্মক ধ্রুবক-সংখ্যা, এবং সহগ $a_n, a_{n-1}, \cdots$ গুলি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ধ্রুবক-সংখ্যা অথবা ইহাদের কতকগুলি '0' হইতে পারে]

$(x-1)$ দ্বারা অপেক্ষকটিকে ভাগ করিলে ভাগশেষ-উপপাদ্য অনুসারে অপেক্ষকে x-এর মান 1 বসাইয়া ভাগশেষ পাই

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0.$$

অতএব, এই ভাগশেষ (অর্থাৎ সহগগুলির সমষ্টি) শূন্য হইলে $(x-1)$, অপেক্ষকের একটি উৎপাদক হইবে। আবার, অপেক্ষকে $x = -1$ বসাইলে, উহার মান n যুগ্ম হইলে, $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \cdots - a_1 + a_0$, এবং n অযুগ্ম হইলে, $-a_n + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots - a_1 + a_0$ হয়।

$$\therefore \quad a_n + a_{n-2} + \cdots = a_{n-1} + a_{n-3} + \cdots$$

বা, $\quad (a_n + a_{n-2} + \cdots) - (a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots)^* = 0$

হইলে, n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক না কেন, অপেক্ষককে $(x+1)$ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ 0 হইবে, অর্থাৎ $(x+1)$, অপেক্ষকের একটি উৎপাদক হইবে।

উদাহরণস্বরূপ, $3x^9 + 17x^8 - 2x^6 + 41x^5 + 41x^4 - 89x^2 - 15x + 4$ এর $(x-1)$ একটি উৎপাদক ;

$23x^6 + 19x^5 - 2x^4 - 9x^3 + 18x + 7$ এর $(x+1)$ একটি উৎপাদক ; ইত্যাদি।

* x-নিরপেক্ষ a_0 পদটি সর্বদাই x এর যুগ্ম ঘাতের সহগগুলির যোগফলের সহিত থাকিবে।

Examples I

1. If $f(x) \equiv 2x^2 - x + 1$ and $\phi(x) \equiv x^3 - 3x + 1$, find the value of (i) $f(1) + \phi(-1)$, (ii) $f(0) + \phi(0)$ and (iii) $f(-2) - \phi(0)$.

2. If $y = f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$, show that $f(y) = -\dfrac{3x-2}{4x-11}$.

3. If $x - a$ is the H. C. F. of $qx^2 + 2x + p$ and $qx^2 + x + r$, show that $a = r - p$ and $q(r-p)^2 + 2r - p = 0$.

4. If $x + 3$ is the H. C. F. of $3ax^3 + 5x + 2p$ and $3ax^2 + 3x + p + 6$, find the values of p and a.

5. If $ax^6 - bx^5 + cx^4 + dx^3 + ax^2 - bx - a$ is divisible by $x + 1$, show that $d = a + 2b + c$.

6. If n is a positive integer, show that $11^n - 1$ is completely divisible by 10.

7. If n be an even positive integer, show that $4^{2n} - 6^{2n}$ is a multiple of 100.

8. If n be any positive integer, prove that $5^{2n} - 1$ is always divisible by 24

9. Show that $7^{2n} - 1$ is divisible by both 16 and 24, when n is any positive integer.

10. Show that $19^n = 18(19^{n-1} + 19^{n-2} + \cdots + 1) + 1$, when n is any positive integer.

11. For what value of m will $a^m - x^m$ be divisible both by $a^n + x^n$ and $a^n - x^n$ exactly, when n is a positive integer ?

12. If $x^3 + px + r$ and $3x^2 + p$ have a common factor, prove that $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{r^2}{4} = 0$.

13. Find l and m in order that $2x^3 - (2l+1)x^2 + (l+m)x + m$ may be exactly divisible by $2x^2 - x - 3$.

14. Use the Remainder Theorem to prove that $(b+c)(c+a)(a+b)$ is a factor of $(a+b+c)^5 - a^5 - b^5 - c^5$.

15. If m is a positive integer, show that $81^m.121^m - 1$ is divisible by 100.

16. Show that the following expressions are divisible by $(a-b)(b-c)(c-a)$:

(i) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$.

(ii) $a^7b^7(a-b)^{43}+b^7c^7(b-c)^{43}+c^7a^7(c-a)^{43}$.

(iii) $a^n(b-c)+b^n(c-a)+c^n(a-b)$.

17. Show that each of the binomials $a-b$, $b-c$, $c-a$ and $x-y$ is a factor of the expression $(ax+by)(bx+cy)(cx+ay) - (ay+bx)(by+cx)(cy+ax)$.

18. (i) If the sum of the digits of a number be divisible by 3, prove that the number itself is divisible by 3.

(ii) In any number, if the difference between the sum of the digits in the odd places and the sum of the digits in the even places be zero, or is a multiple of 11, show that the number itself is divisible by 11.

ANSWERS

1. (i) 5. (ii) 2. (iii) 10. **4.** $a=-\frac{1}{15}$, $p=\frac{24}{5}$.

11. m is an even multiple of n. **13.** $l=-1$, $m=-3$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

দুরূহ উৎপাদক (Harder Factors)

2·1. বীজগণিতে রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় একটি অতি প্রয়োজনীয় বিষয়।

a^2-b^2, $a^3 \pm b^3$, $x^2+(a+b)x+ab$ এর মত সহজ আকারের রাশিমালাকে কি প্রকারে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হয় তাহার সহিত ছাত্রগণ পূর্বেই পরিচিত হইয়াছে। সেগুলির বিস্তারিত আলোচনা না করিয়া বর্তমানে আমরা অপেক্ষাকৃত দুরূহ রাশিমালার উৎপাদকে বিশ্লেষণ সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

এখানে উৎপাদক-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়মের উল্লেখ অপ্রাসঙ্গিক হইবে না। অঙ্ক-সমাধানে সহায়তার জন্য বীজগণিতে অনেক আদর্শ সূত্র আছে। তন্মধ্যে যে সূত্রগুলি উৎপাদক নির্ণয়ে প্রয়োজন আমরা সেই সকল সূত্রের সাহায্য লই। উৎপাদক উপপাদ্যের (Factor Theorem) সাহায্যে আমরা কোন রাশিমালাকে পরীক্ষা করিয়া উহার উৎপাদক নির্ণয় করিতে পারি। ইহা ছাড়াও বিবিধ কৌশল সাহায্যে বীজগণিতীয় রাশিমালাকে কোন আদর্শ সূত্রের আকারে পরিণত করিয়া উহার উৎপাদক আমরা নির্ণয় করিতে পারি।

2·2. প্রথমে $\mathbf{a^2-b^2}$ আকারবিশিষ্ট কয়েকটি রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ-প্রণালী দেখানো হইল।

Ex. 1. Factorise $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{2(ab+cd)\}^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$=\{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}$$

$$=\{(a^2+b^2+2ab)-(c^2+d^2-2cd)\}\{(c^2+d^2+2cd)-(a^2+b^2-2ab)\}$$

$$=\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}$$

$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b).$$

এই অঙ্কটি সরাসরি দুইটি পূর্ণবর্গের অন্তরফলরূপে থাকায় উপরোক্ত সূত্রের প্রয়োগে সহজেই রাশিমালাদ্বয়কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা গিয়াছে। কিন্তু

কোন কোন স্থলে রাশিমালা দুই বর্গের অন্তরফলরূপে দেওয়া না থাকিলেও দুই বর্গের অন্তরফলরূপে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল।

Ex. 2. Resolve the following expressions into factors.

(i) $6x^2-x-15$. (ii) x^4+4. (iii) $x^4+x^2y^2+y^4$.
(iv) a^4+8a^2-48.

(i) $6x^2-x-15=6\left(x^2-\dfrac{x}{6}-\dfrac{5}{2}\right)$

$$=6\{x^2-2.x.\tfrac{1}{12}+(\tfrac{1}{12})^2-(\tfrac{1}{12})^2-\tfrac{5}{2}\}$$
$$=6\{(x+\tfrac{1}{12})^2-(\tfrac{19}{12})^2\}=6(x+\tfrac{1}{12}+\tfrac{19}{12})(x+\tfrac{1}{12}-\tfrac{19}{12})$$
$$=6(x+\tfrac{5}{3})(x-\tfrac{3}{2})=(3x+5)(2x-3).$$

(ii) $x^4+4=x^4+2^2=(x^2+2)^2-4x^2$

[$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ সূত্র সাহায্যে]

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$
$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

(iii) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

(iv) $a^4+8a^2-48=a^4+2.a^2.4+4^2-4^2-48$

$$=(a^2+4)^2-8^2$$
$$=(a^2+4+8)(a^2+4-8)$$
$$=(a^2+12)(a^2-4)$$
$$=(a^2+12)(a+2)(a-2).$$

2·3. $a^3\pm b^3$ আকারযুক্ত রাশির উৎপাদক নির্ণয়।

(i) $8x^3+27y^3=(2x)^3+(3y)^3$

$$=(2x+3y)\{(2x)^2-2x.3y+(3y)^2\}$$
$$=(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$$

(ii) $a^6+\dfrac{b^6}{27}=(a^2)^3+\left(\dfrac{b^2}{3}\right)^3$

$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2-a^2.\frac{b^2}{3}+\left(\frac{b^2}{3}\right)^2\right\}$$
$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^4-\frac{a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{9}\right)$$

$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{(a^2)^2+2a^2.\frac{b^2}{3}+\left(\frac{b^2}{3}\right)^2-a^2b^2\right\}$$
$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left\{\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)^2-(ab)^2\right\}$$
$$=\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right).$$

(iii) $64x^6-1=(8x^3)^2-1=(8x^3+1)(8x^3-1)$
$=\{(2x)^3+1\}\{(2x)^3-1\}$
$=(2x+1)(4x^2-2x+1)(2x-1)(4x^2+2x+1).$

(iv) $x^3+6x^2+12x-56=x^3+3.x^2.2+3.x.2^2+2^3-64$
$=(x+2)^3-4^3$
$=(x+2-4)\{(x+2)^2+(x+2).4+4^2\}$
$=(x-2)(x^2+8x+28).$

2·4. পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয় (Determination of factors by trial).

আমরা পূর্ববর্তী অধ্যায়ে গুণনীয়ক-বিষয়ক উপপাদ্যে দেখিয়াছি যদি x-যুক্ত কোন মূলদ ও অখণ্ড রাশিমালাতে x-এর স্থলে a বসাইলে রাশিমালার মান 0 শূন্য হয়, তবে ঐ রাশিমালা $x-a$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য অর্থাৎ $x-a$, উহার একটি উৎপাদক হইবে। এই উপপাদ্যের সাহায্যে পরীক্ষা দ্বারা আমরা বহু ক্ষেত্রে রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে পারি। নিম্নের উদাহরণ হইতে বিষয়টি পরিষ্কাররূপে বুঝা যাইবে।

Ex. *Resolve the following expressions into factors :—*

(i) $x^3-7x+6.$ (ii) $x^3-2x^2-23x+60.$
(iii) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18.$

(i) $x^3-7x+6.$

এই রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে 1 বসাইলে ইহা
$$=1^3-7.1+6=1-7+6=0.$$

অতএব গুণনীয়ক-বিষয়ক উপপাদ্যের সাহায্যে $x-1$ এই রাশিমালার একটি গুণনীয়ক বা উৎপাদক হইবে। এখন, এই রাশিমালার পদগুলি এইরূপে বিন্যস্ত করিতে হইবে, যেন পর পর দুইটি পদের মধ্যে $x-1$ সাধারণ (common) থাকে।

$$x^3-7x+6=x^3-x^2+x^2-x-6x+6$$
$$=x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)\{x^2+3x-2x-6\}$$
$$=(x-1)\{x(x+3)-2(x+3)\}$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3).$$

(ii) $x^3-2x^2-23x+60.$

পরীক্ষা দ্বারা আমরা দেখিতে পাই x-এর মান 3 ধরিলে, রাশিমালার মান 0 শূন্য হয়। অতএব, $x-3$ এই রাশিমালার একটি উৎপাদক।

$$x^3-2x^2-23x+60=x^3-3x^2+x^2-3x-20x+60$$
$$=x^2(x-3)+x(x-3)-20(x-3)$$
$$=(x-3)(x^2+x-20)$$
$$=(x-3)(x^2-4x+5x-20)$$
$$=(x-3)\{x(x-4)+5(x-4)\}$$
$$=(x-3)(x-4)(x+5).$$

(iii) $x^4+3x^3-7x^2-27x-18.$

উপরোক্ত রাশিমালায় $x=-1$ বসাইলে রাশিমালাটি 0 শূন্য হয়। সুতরাং, $x-(-1)$ অর্থাৎ $x+1$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক।

$$\therefore\quad x^4+3x^3-7x^2-27x-18=x^4+x^3+2x^3+2x^2$$
$$-9x^2-9x-18x-18$$
$$=x^3(x+1)+2x^2(x+1)-9x(x+1)-18(x+1)$$
$$=(x+1)(x^3+2x^2-9x-18)$$
$$=(x+1)\{x^2(x+2)-9(x+2)\}$$
$$=(x+1)(x+2)(x^2-9)$$
$$=(x+1)(x+2)(x+3)(x-3).$$

দ্রষ্টব্য। এই নিয়মে x-যুক্ত কোন রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে পরীক্ষার জন্য আমরা প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে যে মান বসাই তাহা অবশ্যই প্রদত্ত রাশিমালার x-বর্জিত পদের এক গুণনীয়ক হইবে। মনে কর, x-বর্জিত পদের একটি গুণনীয়ক যদি a হয়, তবে প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর পরিবর্তে a অথবা $-a$ বসাইয়া পরীক্ষা করিতে হইবে।

2·5. রাশিমালার অন্তর্গত কোন অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া উৎপাদক নির্ণয়।

দুই বা ততোধিক অক্ষরবিশিষ্ট সমমাত্র রাশিমালার গুণনীয়ক নির্ণয়ে এই নিয়ম প্রযুক্ত হয়।

Ex. 1. *Resolve* $a^2-6b^2-6c^2-13bc-ca+ab$ *into factors.*

প্রদত্ত রাশিমালা 'a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে হয়

$$\begin{aligned}
&a^2+a(b-c)-(6b^2+13bc+6c^2)\\
&=a^2+a(b-c)-(6b^2+9bc+4bc+6c^2)\\
&=a^2+a(b-c)-\{3b(2b+3c)+2c(2b+3c)\}\\
&=a^2+a(b-c)-(2b+3c)(3b+2c)\\
&=a^2+a\{(3b+2c)-(2b+3c)\}-(2b+3c)(3b+2c)\\
&=a^2+a(\alpha-\beta)-\alpha\beta, \text{ যখন } 3b+2c=\alpha,\ 2b+3c=\beta.\\
&=a(a+\alpha)-\beta(a+\alpha)=(a+\alpha)(a-\beta)\\
&=(a+3b+2c)(a-2b-3c).
\end{aligned}$$

Ex. 2. *Resolve* $6a^2+7ab+2b^2+11ac+7bc+3c^2$ *into factors.*

a, b, c অক্ষরযুক্ত এই রাশিমালাকে পর পর a, b, c এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া তিন রকমে ইহার উৎপাদক নির্ণয় করিব।

প্রথমতঃ 'a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

$$\begin{aligned}
&=6a^2+a(7b+11c)+(2b^2+7bc+3c^2)\\
&=6a^2+a(7b+11c)+(2b^2+6bc+bc+3c^2)\\
&=6a^2+a(7b+11c)+\{2b(b+3c)+c(b+3c)\}\\
&=6a^2+a(7b+11c)+(b+3c)(2b+c)\\
&=6a^2+a\{3(b+3c)+2(2b+c)\}+(b+3c)(2b+c)\\
&=3a(2a+b+3c)+(2b+c)(2a+b+3c)\\
&=(2a+b+3c)(3a+2b+c).
\end{aligned}$$

দ্বিতীয়তঃ, 'b'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

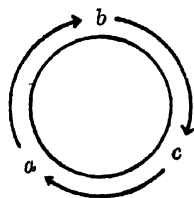
$$\begin{aligned}
&=2b^2+7b(a+c)+(6a^2+11ac+3c^2)\\
&=2b^2+7b(a+c)+(6a^2+9ac+2ac+3c^2)\\
&=2b^2+7b(a+c)+3a(2a+3c)+c(2a+3c)
\end{aligned}$$

$$=2b^2+7b(a+c)+(2a+3c)(3a+c)$$
$$=2b^2+b\{2(2a+3c)+(3a+c)\}+(2a+3c)(3a+c)$$
$$=2b(b+2a+3c)+(3a+c)(b+2a+3c)$$
$$=(b+2a+3c)(2b+3a+c).$$

তৃতীয়তঃ, 'c'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে, রাশিমালাটি

$$=3c^2+c(11a+7b)+(6a^2+7ab+2b^2)$$
$$=3c^2+c(11a+7b)+(6a^2+3ab+4ab+2b^2)$$
$$=3c^2+c(11a+7b)+3a(2a+b)+2b(2a+b)$$
$$=3c^2+c(11a+7b)+(2a+b)(3a+2b)$$
$$=3c^2+c\{3(3a+2b)+(2a+b)\}+(2a+b)(3a+2b)$$
$$=3c(c+3a+2b)+(2a+b)(c+3a+2b)$$
$$=(c+3a+2b)(3c+2a+b).$$

2·6. চক্রক্রম (Cyclic Order).

পার্শ্বচিত্রে প্রদর্শিতরূপে a, b, c অক্ষর তিনটি বৃত্তের পরিধির উপরে সাজাইয়া লিখ। এখন, a হইতে সুরু করিয়া তীরচিহ্ন-নির্দিষ্ট দিকে অগ্রসর হইলে অক্ষর তিনটি abc এই ক্রমে পাওয়া যায়। তদ্রূপ, b ও c হইতে আরম্ভ করিয়া তীরচিহ্নিত দিকে রওনা হইলে ঐ অক্ষর তিনটি যথাক্রমে bca ও cab ক্রমে পাওয়া যায়। a, b, c অক্ষরত্রয় কোন রাশিমালায় এইরূপভাবে বিন্যস্ত হইলে ঐ বিন্যাসকে চক্রক্রম (Cyclic order) বলে।

নিম্নে প্রদত্ত রাশিমালাগুলিতে a, b, c অক্ষরত্রয় চক্রক্রমে বিন্যস্ত (i) $a-b$, $b-c$ এবং $c-a$; (ii) $a+b$, $b+c$, এবং $c+a$; (iii) $a^2(b-c)$, $b^2(c-a)$ এবং $c^2(a-b)$; (iv) $a^2+b^2-c^2$, $b^2+c^2-a^2$ এবং $c^2+a^2-b^2$ প্রভৃতি।

বীজগণিতে 'চক্রক্রমের' প্রয়োজনীয়তা খুব বেশী। চক্রক্রমে বিন্যস্ত রাশিমালার একটি পদ জানা থাকিলে অপর পদগুলি অনায়াসে লেখা যায়। সেইজন্য বীজগণিতে কোন রাশিমালা অক্ষরগুলির কি ক্রমে সাধারণতঃ লেখা হইয়া থাকে শিক্ষার্থীদের সেইদিকে বিশেষ মনোযোগ দেওয়া দরকার। $bc+ca+ab$ রাশিমালার পদবিন্যাস লক্ষ্য করিলে দেখিতে পাইবে a-বর্জ্জিত পদ প্রথমে

অবস্থিত এবং চক্রক্রমে অক্ষরগুলি পরিবর্তিত করিয়া অর্থাৎ a কে b, b কে c এবং c কে a তে পরিবর্তিত করিয়া একের পর এক অপর দুই পদ পাওয়া যায়। সেইরূপ, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ রাশিমালাকে লক্ষ্য করিলে একই প্রকারের পদবিন্যাস পরিলক্ষিত হইবে। কেননা, $a^2(b-c)$ পদের অক্ষর-গুলিতে চক্রক্রমে পরিবর্তন সাধন করিয়া অর্থাৎ a-এর স্থলে b, b-এর স্থলে c এবং c-এর স্থলে a লিখিয়া আমরা $b^2(c-a)$ পদ পাই এবং আর একবার অক্ষরগুলি চক্রক্রমে পরিবর্তন করিলে আমরা তৃতীয় পদ পাই।

চক্রক্রমে অবস্থিত তিন অক্ষর a, b, c-যুক্ত কোন রাশিমালায় $b-c$ একটি পদ হইলে অপর দুইপদ যথাক্রমে $c-a$ এবং $a-b$ হইবে। কোনও ক্ষেত্রে $b-c$, $a-c$ এবং $a-b$ এই তিনটি পদ থাকিলে দ্বিতীয় পদ $a-c$ চক্রক্রমে নাই। ইহাকে চক্রক্রমে আনিতে হইলে a এবং c কে একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিয়া তৎপূর্বে একটি বিয়োগ-চিহ্ন দিতে হইবে। যথা, $a-c = -(c-a)$.

$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ আকারে লিখিত যে সমস্ত রাশিমালাতে a, b, c এর ঘাতগুলি পরস্পর সমান সেগুলির প্রত্যেকটিই 0 শূন্য হইবে। যথা,

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0$$
$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0$$
$$a^3(b^3-c^3)+b^3(c^3-a^3)+c^3(a^3-b^3)=0$$

....

ইত্যাদি।

2·7. সূত্র (A). $\mathbf{a^3+b^3+c^3-3abc}$
$$\mathbf{=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)}$$
$$\mathbf{=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.}$$

প্রমাণ। $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)-3abc$$
$$=(a+b+c)\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}$$
$$-3bc(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a^2-ab-ac+b^2+2bc+c^2-3bc)$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2bc-2ca-2ab)$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}.$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

দ্রষ্টব্য। যদি $\mathbf{a+b+c=0}$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, অর্থাৎ $\mathbf{a^3+b^3+c^3=3abc}$.

এই সূত্রের সাহায্যে আমরা $a^3+b^3+c^3-3abc$ এর আকারের রাশি-মালাকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Resolve into factors*

(i) $p^3-8q^3-r^3-6pqr$.

(ii) x^6+7x^3-8.

(iii) $14a^3-4b^3+9a^2b$.

(i) $p^3-8q^3-r^3-6pqr$

$$=p^3+(-2q)^3+(-r)^3-3.\,p.(-2q).(-r)$$

$$=\{p+(-2q)+(-r)\}\{p^2+(-2q)^2+(-r)^2-(-2q)(-r)-(-r).p-p(-2q)\}$$

$$=(p-2q-r)(p^2+4q^2+r^2-2qr+rp+2pq).$$

(ii) x^6+7x^3-8

$$=x^6+x^3-2^3+6x^3$$

$$=(x^2)^3+x^3-2^3-3.x^2.x.(-2)$$

$$=(x^2+x-2)(x^4+x^2+4-x^3+2x^2+2x)$$

$$=(x+2)(x-1)(x^4-x^3+3x^2+2x+4).$$

(iii) $14a^3-4b^3+9a^2b$

$$=\tfrac{1}{2}(28a^3-8b^3+18a^2b)$$

$$=\tfrac{1}{2}\{27a^3+a^3+(-2b)^3-3.3a.a.(-2b)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(3a+a-2b)(9a^2+a^2+4b^2-3a^2+6ab+2ab)$$

$$=\tfrac{1}{2}(4a-2b)(7a^2+8ab+4b^2)$$

$$=(2a-b)(7a^2+8ab+4b^2).$$

2·8. সূত্র (B). $\mathbf{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}$
$\mathbf{\equiv bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc}$
$\mathbf{\equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc}$
$\mathbf{=(b+c)(c+a)(a+b).}$

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$, $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$ এবং $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$ রাশিমালা তিনটি যে পরস্পর সমান, তাহা প্রত্যেকটিকে সরল করিয়া সহজেই প্রমাণ করা যায়। অতএব, উপরের সূত্রের প্রথমটির প্রমাণ দিলেই যথেষ্ট হইবে।

প্রমাণ। $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$$
$$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$$

['a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)$$
$$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$$
$$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=(b+c)(c+a)(a+b).$$

দ্রষ্টব্য। উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে $b=-c$ প্রভৃতি বসাইয়া প্রদত্ত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। [§ 2·10, তৃতীয় পদ্ধতি দেখ।]

2·9. সূত্র (C). $\mathbf{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}$
$\mathbf{\equiv bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc}$
$\mathbf{\equiv a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc}$
$\mathbf{=(a+b+c)(bc+ca+ab).}$

প্রমাণ। $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$

$$=a^2b+a^2c+abc+b^2c+ab^2+abc+ac^2+bc^2+abc$$
$$=a(ab+ac+bc)+b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)$$
$$=(bc+ca+ab)(a+b+c).$$

অনুসিদ্ধান্ত। $\mathbf{(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(bc+ca+ab)(a+b+c)}$

এবং $\mathbf{(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=(b+c)(c+a)(a+b).}$

উপরের সূত্র দুইটি হইতে এই অনুসিদ্ধান্ত সহজেই প্রমাণিত হয়।

2·10. সূত্র (D). $\mathbf{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$ .... (i)

$\mathbf{\equiv bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}$ .... (ii)

$\mathbf{\equiv -\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}}$ (iii)

$\mathbf{= -(b-c)(c-a)(a-b).}$

সরল করিয়া সহজেই দেখা যায় যে, (i), (ii) এবং (iii) রাশিমালা তিনটি পরস্পর সমান। অতএব, ইহার একটি লইয়া সূত্রটি নিম্নে প্রমাণ করা হইল।

প্রমাণ। প্রথম পদ্ধতি। $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

['a'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$= -(b-c)(c-a)(a-b).$

দ্বিতীয় পদ্ধতি। $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c+a-b)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-b^2(b-c)-b^2(a-b)+c^2(a-b)$

$=(b-c)(a^2-b^2)-(a-b)(b^2-c^2)$

$=(b-c)(a-b)(a+b-b-c)$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$= -(b-c)(c-a)(a-b).$

তৃতীয় পদ্ধতি। যদি আমরা রাশিমালা

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$-তে .... (i)

$b=c$ বসাই, তবে ইহা 0 হইবে।

∴ উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্য (Factor Theorem) অনুসারে $b-c$ ইহার একটি উৎপাদক হইবে এবং অনুরূপ-ভাবে $c-a$ এবং $a-b$-ও এই রাশিমালার উৎপাদক হইবে। এক্ষণে, (i) একটি তৃতীয় ক্রমের রাশিমালা, সুতরাং, ইহার তিনটি মাত্র উৎপাদক থাকিতে পারে।

$\therefore \quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) \equiv k(b-c)(c-a)(a-b) \quad$ (ii)
এখানে k একটি a, b, c নিরপেক্ষ সংখ্যা অর্থাৎ a, b, c এর যে-কোন মান হইলে k এর মান সতত অপরিবর্তিত থাকিবে।

(ii) এর দুইদিকে a^2 এর সহগ তুলনা করিয়া আমরা পাই $k=-1$.

$\therefore \quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$

অন্য প্রকারেও k এর মান নির্ণয় করা যায়। যেহেতু, k এর মান a, b, c এর মান-নিরপেক্ষ, a, b, c এর যে-কোন তিনটি নির্দিষ্ট মান বসাইয়া আমরা k এর মান নির্ণয় করিতে পারি। ধর, $a=0, b=1, c=2$ তাহা হইলে (ii) এর বামপক্ষের মান -2 হইবে এবং ডানপক্ষের মান $2k$ হইবে। $\therefore$ পূর্বের ন্যায় $k=-1$ পাওয়া যাইবে।

2·11. সূত্র (E). $\mathbf{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}$
$\mathbf{=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).}$

$$\begin{aligned}
& a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
&=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3\\
&=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^3-c^2)
\end{aligned}$$

['a'-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$\begin{aligned}
&=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}\\
&=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)\\
&=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}\\
&=(b-c)(a-b)\{a(a+b)-bc-c^2\}\\
&=(b-c)(a-b)(a^2-c^2+ab-bc)\\
&=(b-c)(a-b)\{(a^2-c^2)+b(a-c)\}\\
&=(b-c)(a-b)(a-c)(a+c+b)\\
&=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).
\end{aligned}$$

§ 2·10 এর তৃতীয় পদ্ধতির ন্যায় এক্ষেত্রেও উৎপাদক-সংক্রান্ত উপপাদ্যের সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, $b-c$, $c-a$ এবং $a-b$ প্রদত্ত রাশিমালার উৎপাদক হইবে। যেহেতু প্রদত্ত রাশিমালা চারিমাত্রার, অতএব, বাকি উৎপাদক একমাত্রাবিশিষ্ট $la++mb+nc$ আকারের হইবে। এখন পূর্বের ন্যায় a, b, c র যে-কোন তিনপ্রস্থ মান বসাইয়া $l=m=n=-1$ পাওয়া যাইবে।

2·12. সূত্র (F). $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

প্রমাণ। $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

$$=\{(a+b+c)^3-a^3\}-(b^3+c^3)$$
$$=(a+b+c-a)\{(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2\}$$
$$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)\{3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc\}$$
$$-(b+c)(b^2-bc+c^2)$$
$$=(b+c)\{3a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+2bc-b^2+bc-c^2\}$$
$$=(b+c)(3a^2+3ab+3ac+3bc)$$
$$=3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$$
$$=3(b+c)(a+b)(a+c)$$
$$=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b).$

দ্রষ্টব্য। উৎপাদক-উপপাদ্য সাহায্যে $b=-c$ প্রভৃতি বসাইয়াও সূত্র (F) পাওয়া যাইতে পারে।

2·13. সূত্র (G). $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$
$$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$$

['a'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$$
$$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}.$$

[মধ্য-বন্ধনীর অন্তর্গত অংশ 'b'-র ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

$$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$$
$$=(b-c)(c-a)\{-c(a^2-b^2)-ab(a-b)\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)\{c(a+b)+ab\}$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

2·14. সূত্র (H). $\mathbf{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$
$\mathbf{=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).}$

প্রমাণ।

বাম পক্ষ $=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$
$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$
$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$
$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$
$=(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)(b+c+a)$
= দক্ষিণ পক্ষ।

2·15. বিবিধ সমাধান।

Ex. 1. *Find the factors of* $a^9-64a^3-a^6+64$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3(a^6-64)-(a^6-64)$
$=(a^6-64)(a^3-1)$
$=(a^3+8)(a^3-8)(a^3-1)$
$=(a+2)(a^2-2a+4)(a-2)(a^2+2a+4)$
$(a-1)(a^2+a+1).$

Ex. 2. *Factorise* $a(a+1)x^2+(a+b)xy-b(b-1)y^2$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2x^2-b^2y^2+ax^2+(a+b)xy+by^2$
$=(ax+by)(ax-by)+(ax+by)(x+y)$
$=(ax+by)(ax-by+x+y)$
$=(ax+by)\{(a+1)x-(b-1)y\}.$

Ex. 3. *Factorise* $x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz$.

$x^2-y^2-3z^2-2xz+4yz=x^2-2xz-(y^2-4yz+3z^2)$
$=x^2-2xz-(y-3z)(y-z)$
$=x^2+x\{(y-3z)-(y-z)\}-(y-3z)(y-z)$
$=x^2+x(y-3z)-x(y-z)-(y-3z)(y-z)$
$=x\{x+y-3z)-(y-z)(x+y-3z)$
$=(x+y-3z)(x-y+z).$

Ex. 4. *Resolve* $(x+1)(x+2)(2x-3)(2x-5)+12$ *into factors.* [*C. U. 1941*]

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{(x+1)(2x-3)\}\{(x+2)(2x-5)\}+12$

$=(2x^2-x-3)(2x^2-x-10)+12$

$=(a-3)(a-10)+12$ [$2x^2-x$-কে a ধরিয়া]

$=a^2-13a+30+12=a^2-13a+42$

$=(a-6)(a-7)$

$=(2x^2-x-6)(2x^2-x-7)$ ['a'-এর মান বসাইয়া]

$=(2x^2-4x+3x-6)(2x^2-x-7)$

$=(x-2)(2x+3)(2x^2-x-7).$

এখানে চারিটি বন্ধনীর অন্তর্গত চারিটি উৎপাদকের দুইটি দুইটি করিয়া এমনভাবে লওয়া হইল, যেন লব্ধ দুই গুণফলে x^2 এবং x-এর সাংখ্য সহগ দুইটি সমান হয়।

Ex. 5. *Factorise* $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+3.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+1\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+1\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+1\right)$

$$=\frac{a+b+c}{b}+\frac{b+c+a}{a}+\frac{b+a+c}{c}$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Ex. 6. *Simplify* :

$$\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{-\{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$$=\frac{-\{-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)\}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$=bc+ca+ab.$

Ex. 7: *Resolve* $a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$ *into factors.*

$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y),$
[$x=a^2$, $y=b^2$ এবং $z=c^2$ লিখিলে]
$=-(y-z)(z-x)(x-y)$
$=-(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$
$=-(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)(a+b)(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b).$

Ex. 8. *Resolve* $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$ *into factors.*

ধর, $(x+a)=p$, $x+b=q$ এবং $x+c=r$;
$\therefore\ p-q=x+a-x-b=a-b$, $q-r=x+b-x-c=b-c$
এবং $r-p=x+c-x-a=c-a.$
$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=p^2(q-r)+q^2(r-p)+r^2(p-q)$
$=-(q-r)(r-p)(p-q)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

বিকল্প পদ্ধতি। $(x+a)^2(b-c)+(x+b)^2(c-a)+(x+c)^2(a-b)$
$=(x^2+2ax+a^2)(b-c)+(x^2+2bx+b^2)(c-a)$
$+(x^2+2cx+c^2)(a-b)$
$=x^2(b-c+c-a+a-b)+2x\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$
$+a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=x^2\times 0+2x\times 0-(b-c)(c-a)(a-b)$
$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

Ex. 9. *Factorise* $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3.$
মনে কর, $a=x(y-z)$, $b=y(z-x)$ এবং $c=z(x-y)$
$\therefore\ a+b+c=x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0.$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc.$
অর্থাৎ $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$
$=3.x(y-z).y(z-x).z(x-y)$
$=3xyz(y-z)(z-x)(x-y).$

Ex. 10. *Factorise* $8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3.$
মনে কর, $y+z=a$, $z+x=b$, $x+y=c.$
$\therefore\ a+b+c=y+z+z+x+x+y=2(x+y+z).$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= \{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$
$$= (a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$$
$$= 3(b+c)(c+a)(a+b)$$
$$= 3(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z).$$

Ex. 11. *If* $2s=x+y+z$, *show that* $(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz=s^3$.

এখানে $2s=x+y+z$. $\therefore$ $3s=x+y+z+s$

বা, $(s-x)+(s-y)+(s-z)=s$ [পক্ষান্তর করিয়া]

উভয় পক্ষের ঘন করিয়া

$$\{(s-x)+(s-y)+(s-z)\}^3=s^3.$$

বাম পক্ষ $=(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3\{(s-y)+(s-z)\}\{(s-z)+(s-x)\}\{(s-x)+(s-y)\}$

$$=(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3(2s-y-z)(2s-z-x)(2s-x-y)$$

$$=(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz.$$

$\therefore$ $(s-x)^3+(s-y)^3+(s-z)^3+3xyz=s^3$.

Ex. 12. *Factorise* $x^4-5x^3-12x^2-5x+1$.

$$x^4-5x^3-12x^2-5x+1$$
$$=(x^4+1)-(5x^3+5x)-12x^2$$
$$=(x^2+1)^2-2x^2-5x(x^2+1)-12x^2$$
$$=(x^2+1)^2-5x(x^2+1)-14x^2$$
$$=a^2-5ax-14x^2$$ [$x^2+1=a$ লিখিয়া].
$$=a^2-7ax+2ax-14x^2$$
$$=a(a-7x)+2x(a-7x)=(a-7x)(a+2x)$$
$$=(x^2+1-7x)(x^2+1+2x)=(x^2-7x+1)(x+1)^2.$$

দ্রষ্টব্য ঃ এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে প্রথম ও শেষপদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সহগগুলি সমান। এরূপ ক্ষেত্রে সাধারণতঃ সমান সহগ-বিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র সংযুক্ত করিয়া লিখিতে হয়।

Examples II

Resolve into factors :

1. (i) $x^2+x-132$. (ii) $x^2-7x-44$.
(iii) $(a+b)^2-11c(a+b)-42c^2$. (iv) $18x^2-51xy+35y^2$.
(v) $6(a^2+2b)^2+7(a^4-4b^2)-20(a^2-2b)^2$.

2. (i) $4m^2-(n+p)^2$. (ii) $16-(a-b)^2$.
(iii) $4(3a-7b)^2-(2a-3b)^2$. (iv) $(x-5y)^2-(5x+1)^2$.
(v) $45x^2-125z^6$.

3. (i) a^4+64. (ii) x^4+4y^4. (iii) $4x^4+81$. (iv) x^4-16.

4. (i) x^4+2x^2+9. (ii) a^4+3a^2+4. (iii) a^4+2a^2-3.
(iv) x^8+81x^4+6561.

5. (i) $x^4-3x^2y^2+y^4$. (ii) $m^4+12m^2n^2+64n^4$.
(iii) $4a^4-21a^2b^2+b^4$. (iv) $x^4-2x^2y^2-63y^4$.

6. (i) $x^6-16x^4+2x^3+1$. (ii) $2(cd-xy)+x^2+y^2-c^2-d^2$.
(iii) $9x^2-24xy-4p^2-q^2+4pq+16y^2$.

7. (i) $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$.
(ii) $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$.
(iii) $(1-y^2)(1+x)^2-(1-x^2)(1+y)^2$,
(iv) $xyz(x^3+y^3+z^3)-y^3z^3-z^3x^3-x^3y^3$.

8. (i) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$.
(ii) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$.
(iii) $(x+4)(x+6)(x-5)(x-7)-504$.
(iv) $(2x-1)(2x+5)(3x+2)(3x-7)-34$.
(v) $4x(x+1)(3x+2)(3x-1)-15$.
(vi) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2$

9. (i) $375x^3+3$. (ii) $729-a^3$. (iii) $1-343x^3$.
(iv) $(2c+d)^3+343$. (v) $8x^3+(y-2x)^3$.

10. (i) x^6-64. (ii) $64x^6+729$. (iii) $216x^3-\frac{y^3}{27}$.

(iv) $\frac{125}{a^3b^3}-1$. (v) $\frac{x^3}{512}-\frac{64}{x^3}$. (vi) $x^7-16x^3+x^4-16$.

11. (i) $a^3-b^3-c^3-3abc$. (ii) $8a^3+27b^3-c^3+18abc$.
(iii) $x^9+x^6-3x^5+1$. (iv) $x^9-6x^4+8x^3+1$.

12. (i) $2x^2+3y^2+4z^2+5xy+6zx+7yz$.
(ii) $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$.
(iii) $4x^2-3y^2-9z^2+12yz-4xy$.

13. Find the factors of the following expressions by inspection :
(i) x^3-3x^2+4. (ii) $2x^3-9x^2+23x-16$.
(iii) $x^3-11x^2+36x-36$. (iv) $x^4+4x^3-2x^2-12x+9$.
(v) $x^4-9x^2+4x+12$. (vi) $x^4-11x^3+44x^2-76x+48$.
(vii) $x^4+15x^3+70x^2+120x+64$.

14. Factorise :
(i) $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$.
(ii) $x^4-5x^3y+6x^2y^2-5xy^3+y^4$.
(iii) $a^4+4a^3b-10a^2b^2+4ab^3+b^4$.

15. Resolve the following expressions into factors :
(i) $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.
(ii) $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.
(iii) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$.
(iv) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+9abc$.
(v) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.
(vi) $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.
(vii) $(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$.
(viii) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.
(ix) $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$
$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.
(x) $(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2b)^3$.
(xi) $(2y-x)^3+(2x-y)^3-(x+y)^3$.
(xii) $(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3+24xyz$.

16. Prove that
(i) $(1+xy)(1+xz)(y-z)+(1+yz)(1+yx)(z-x)$
$+(1+zx)(1+zy)(x-y)=(y-z)(z-x)(x-y)$.

(ii) $a^2x+b^2y+c^2z=(x+y+z)(a^2+b^2+c^2)$, if $a^2=x^2-yz$, $b^2=y^2-zx$ and $c^2=(z^2-xy)$.

(iii) $x^3+y^3+z^3+w^3+3(y+z)(z+x)(x+y)=0$, if $x+y+z+w=0$.

17. If $2s=a+b+c$, show that

(i) $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$.

(ii) $2(s-a)(s-b)(s-c)+a(s-b)(s-c)+b(s-c)(s-a)$
$+c(s-a)(s-b)=abc$.

(iii) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)$
$=\frac{1}{2}(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

18. If $a+b+c=0$, prove that

(i) $(2a-b)^3+(2b-c)^3+(2c-b)^3=3(2a-b)(2b-c)(2c-a)$.

(ii) $\dfrac{a^2}{2a^2+bc}+\dfrac{b^2}{2b^2+ca}+\dfrac{c^2}{2c^2+ab}=1$.

19. Simplify :

(i) $\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}$.

(ii) $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$.

20. If $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ and $z=a+b-c$, show that $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^2-3abc)$.

ANSWERS

1. (i) $(x+12)(x-11)$. (ii) $(x+4)(x-11)$.
(iii) $(a+b+3c)(a+b-14c)$. (iv) $(3x-5x)(6x-7y)$.
(v) $(7a^2-6b)(14b-a^2)$.

2. (i) $(2m+n+p)(2m-n-p)$. (ii) $(4+a-b)(4-a+b)$.
(iii) $(4a-11b)(8a-17b)$. (iv) $(5y-6x-1)(4x+5y+1)$.
(v) $5(3x+5z^2)(3x-5z^2)$.

3. (i) $(a^2+4a+8)(a^2-4a+8)$. (ii) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.
(iii) $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$. (iv) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$.

4. (i) $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$. (ii) $(a^2+a+2)(a^2-a+2)$.
(iii) $(a-1)(a+1)(a^2+3)$. (iv) $(x^4+9x^2+81)(x^4-9x^2+81)$.

5. (i) $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$.
(ii) $(m^2+2mn+8n^2)(m^2-2mn+8n^2)$.
(iii) $(2a^2+5ab+b^2)(2a^2-5ab+b^2)$.
(iv) $(x-3y)(x+3y)(x^2+7y^2)$.

6. (i) $(x^3+4x^2+1)(x^3-4x^2+1)$. (ii) $(x-y+c-d)(x-y-c+d)$.
(iii) $(3x-4y+2p-q)(3x-4y-2p+q)$.

7. (i) $(xy+ab)(ay^2+b^2x)$. (ii) $(1-ax)(1-ax-cx^2)$.
(iii) $2(1+x)(1+y)(x-y)$. (iv) $(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$.

8. (i) $(x^2+5x+3)(x^2+5x+7)$. (ii) $(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$.
(iii) $(x+2)(x-3)(x+7)(x-8)$.
(iv) $(2x+1)(3x-1)(6x^2+x-36)$.
(v) $(6x^2+4x+3)(6x^2+4x-5)$.
(vi) $(x+8)(2x+15)(2x^2+35x+120)$.

9. (i) $3(5x+1)(25x^2-5x+1)$. (ii) $(9-a)(a^2+9a+81)$.
(iii) $(1-7x)(1+7x+49x^2)$.
(iv) $(2c+d+7)(4c^2+4cd+d^2-14c-7d+49)$.
(v) $y(12x^2-6xy+y^2)$.

10. (i) $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
(ii) $(4x^2+9)(16x^4-36x^2+81)$.
(iii) $\left(6x-\frac{y}{3}\right)\left(36x^2+2xy+\frac{y^2}{9}\right)$.
(iv) $\left(\frac{5}{ab}-1\right)\left(\frac{25}{a^2b^2}+\frac{5}{ab}+1\right)$.
(v) $\left(\frac{x}{8}-\frac{4}{x}\right)\left(\frac{x^2}{64}+\frac{1}{2}+\frac{16}{x^2}\right)$.
(vi) $(x+1)(x+2)(x-2)(x^2+4)(x^2-x+1)$.

11. (i) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2-bc+ca+ab)$.
(ii) $(2a+3b-c)(4a^2+9b^2+c^2+3bc+2ca-6ab)$.
(iii) $(x-1)^2(x^3+x^2+1)(x^4+x^3+2x^2+2x+1)$.
(iv) $(x^3+2x+1)(x^6-2x^4-x^3+4x^2-2x+1)$.

12. (i) $(2x+3y+4z)(x+y+z)$. (ii) $(a-3b+c)(a+b-3c)$.
(iii) $(2x-3y+3z)(2x+y-3z)$.

13. (i) $(x+1)(x-2)^2$.
(ii) $(x-1)(2x^2-7x+16)$. (iii) $(x-2)(x-3)(x-6)$.
(iv) $(x-1)^2(x+3)^2$. (v) $(x+1)(x+3)(x-2)^2$.
(vi) $(x-2)^2(x-3)(x-4)$. (vii) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+8)$.

14. (i) $(x-1)^2(x^2+1)$. (ii) $(x^2-xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$.
(iii) $(a-b)^2(a^2+6ab+b^2)$.

15. (i) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

(ii) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.

(iii) $(b+c)(c+a)(a+b)$.

(iv) $(a+b+c)(bc+ca+ab)$.

(v) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

(vi) $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)$.

(vii) $3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b)$. (viii) $24abc$.

(ix) $2abc$. (x) $3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

(xi) $-3(2x-y)(2y-x)(x+y)$. (xii) $(x+y+z)^3$.

19. (i) $a+b+c$. (ii) 2.

তৃতীয় অধ্যায়

সূচকতত্ত্ব (Laws of Indices)

3·1. প্রাথমিক বীজগণিতে $a \times a$ কে a^2, $a \times a \times a$ কে a^3 প্রভৃতি দ্বারা সূচিত হইয়াছে। সেইরূপ m কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে $a \times a \times a \times \cdots$ (m-সংখ্যক গুণনীয়ক) এর গুণফলকে a^m রূপে লেখা হয়।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে এক বা একাধিক বার সেই সংখ্যা বা রাশিদ্বারা পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে ঐ সংখ্যা বা রাশির **ঘাত** বা **শক্তি** (Power) বলে। যথা, $2 \times 2 \times 2$ এর গুণফলটি '2' এই সংখ্যার তৃতীয় ঘাত এবং ইহা 2^3 রূপে লিখিত হয়; অথবা $3x \times 3x \times 3x \times 3x$ এর গুণফল $3x$ রাশির চতুর্থ ঘাত, এবং ইহাকে $(3x)^4$ রূপে লেখা হয়। এক্ষেত্রে সংখ্যা বা রাশির মাথায় লিখিত 3 বা 4 সংখ্যা পূর্বের সংখ্যা বা রাশির ঘাতের **সূচক** (Index) নামে অভিহিত।

সাধারণভাবে, 'n' যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে $a \times a \times a \times \cdots$ (n-সংখ্যক গুণনীয়ক) $= a^n$, এবং ইহা a রাশির n-ঘাত, এবং 'n' ইহার সূচক।

এখানে উল্লেখযোগ্য যে, 'a' কে a^1 রূপে কল্পনা করা হয়, অর্থাৎ ইহার সূচক 1.

সূচকের এই সংজ্ঞা-অনুসারে (অখণ্ড ধনাত্মক সূচকের ক্ষেত্রে) আমরা কয়েকটি মৌলিক সূচক-সম্বন্ধীয় নিয়ম নিম্নে প্রমাণ করিব।

3·2. I. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

প্রমাণ। সংজ্ঞানুসারে $a^m = a \times a \times a \times \cdots$ m-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$a^n = a \times a \times a \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$\therefore\ a^m \times a^n = (a \times a \times a \times \cdots$ m-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)$

$\times (a \times a \times a \times \cdots$ n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)$

$= a \times a \times a \times \cdots$ $(m+n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m+n}$. [সংজ্ঞানুসারে]

অনুসিদ্ধান্ত। যদি m, n, p অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}.$$

প্রমাণ। $(a^m \times a^n) \times a^p = a^{m+n} \times a^p = a^{m+n+p}$;

ঐরূপ, $m, n, p, q, \cdots$ অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^m \times a^n \times a^p \times a^q \times \cdots = a^{m+n+p+q+\cdots}$$

II. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা এবং m > n হইলে,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

প্রমাণ। $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a \times a \times a \times \cdots\ m\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}{a \times a \times a \times \cdots\ n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}}$

$= a \times a \times a \times \cdots\ (m-n)$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= a^{m-n}$.

[হরের 'n'-সংখ্যক 'a' লবের n-সংখ্যক 'a' র সহিত কাটিয়া গিয়া লবে $(m-n)$-সংখ্যক a পড়িয়া রহিল।]

III. m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

প্রমাণ। $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \cdots$ (n-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= a^{m+m+m+\cdots}$ (n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত) [I এর অনুসিদ্ধান্ত]

$= a^{m \times n} = a^{mn}$.

IV. n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$$a^n \times b^n = (ab)^n.$$

প্রমাণ। $a^n \times b^n = (a \times a \times a \times \cdots\ n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$\times (b \times b \times b \times \cdots\ n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত)

$= ab \times ab \times ab \cdots\ n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$= (ab)^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। $a^n \times b^n \times c^n \times \cdots = (abc\cdots)^n$.

3·3. উপরের চারিটি নিয়ম প্রতিষ্ঠিত করিতে আমরা সূচকগুলিকে অখণ্ড ধনসংখ্যা ধরিয়া লইয়াছি। এখন m যদি অখণ্ড ঋণরাশি হয়, ধরা যাক, -3 ; তবে উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে a^{-3} র কোন ব্যাখ্যা করা সম্ভবপর হইবে না অর্থাৎ উপরোক্ত সংজ্ঞানুসারে a এর -3 বার ক্রমিক গুণফল বাহির করিতে হইবে—যাহা অর্থহীন। সূচক যদি শূন্য বা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশ হয়, তাহা হইলেও উপরোক্ত সংজ্ঞায় একই অসুবিধা দেখা দিবে। সুতরাং, এক্ষণে a^m এর

সূচক 'm', শূন্য বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ হইলে a^m এর সংজ্ঞা নির্ধারণ না করিয়া আমরা আর অগ্রসর হইতে পারি না। এই সকল ক্ষেত্রে উপরের নিয়ম I, অর্থাৎ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ এর সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গতি রাখিয়া a^m এর এমন সংখ্যা দিতে হইবে, যাহা সহজে বোধগম্য হয়। অতএব, সূচক 'm' ও 'n' শূন্য, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ যাহাই হউক না কেন আমরা ধরিয়া লইব $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

(i) a^0 এর সংজ্ঞা নির্ধারণ :

যেহেতু m এবং n যাহাই হউক না কেন $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ধরা হইয়াছে, অতএব, $m = 0$ বসাইয়া $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$.

$$\therefore \quad a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1. \qquad [\, a \neq 0 \text{ ধরিয়া} \,]$$

অর্থাৎ 'a' র শূন্য ভিন্ন যে-কোন মানের জন্য, $\mathbf{a^0 = 1}$.

(ii) $a^{\frac{p}{q}}$ এর সংজ্ঞা নির্ধারণ (p এবং q ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) :

যেহেতু আমরা ধরিয়া লইয়াছি যে, m এবং n ভগ্নাংশ হইলেও নিয়ম I কার্যকরী হইবে, অতএব, ধরা যাক

$$m = \frac{p}{q},\ n = \frac{p}{q} \text{ এবং } a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

$$\therefore \quad a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}}.$$

অতএব, $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{2p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{3p}{q}}$.

এই ভাবে $a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{p}{q}} \times \cdots$ q-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots \ q\text{-সংখ্যক পদ}}$$

অর্থাৎ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p$; $\therefore$ $a^{\frac{p}{q}}$, a^p এর q-তম মূল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. $p = 1$ ধরিলে আমরা পাই $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$;

$\therefore$ $a^{\frac{1}{q}}$, 'a' এর q-তম মূল, অর্থাৎ $\mathbf{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. আবার পূর্বের ন্যায়

$$a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times \cdots \ p\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}$$

$$= a^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\cdots p\text{-সংখ্যক পদ}} = a^{\frac{1}{q}\cdot p} = a^{\frac{p}{q}},$$

$$\text{অর্থাৎ } \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = a^{\frac{p}{q}}$$

সুতরাং, $a^{\frac{1}{q}}$কে p তম ঘাতে উন্নীত করিলে $a^{\frac{p}{q}}$ পাওয়া যাইবে।

এখানে একটি লক্ষণীয় বিষয় হইল যে, q-তম মূল বলিতে যদি সংখ্যার চিহ্নবর্জিত বীজটির কথা না ধরা যায়, তবে $(a^p)^{\frac{1}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ নাও হইতে পারে। যেমন, $(a^4)^{\frac{1}{2}} = \pm a^2$. কিন্তু $\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^4 = +a^2$.

(iii) a^{-n} এর সংজ্ঞা নির্ধারণ, (n ধনসংখ্যা) :

পূর্বেকার ন্যায় যেহেতু m, n ঋণাত্মক হইলেও $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

অতএব, $m = -n$ বসাইয়া $a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

$$\text{অর্থাৎ, } \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

3·4. দেখা যাইতেছে যে, নিয়ম I কে ধরিয়া লইলে $a^{\frac{p}{q}}$, a^0, এবং a^{-n} এর অর্থ নির্ধারণ করা যায়। এখন এই সকল রাশির এই সকল অর্থ ধরিলেও বাকি তিনটি নিয়ম

II $a^m \div a^n = a^{m-n}$

III $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$

IV $(ab)^n = a^n b^n$

সহজেই প্রমাণ করা যায়।

তাহা হইলে, এখন হইতে m এবং n ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ, যাহাই হউক না কেন, উপরের I, II, III, IV সূচক নিয়ম চারিটি সর্বক্ষেত্রে প্রয়োগ করিব (যদি 'a' র মানের কোন অসঙ্গতি না থাকে)*।

নিম্নে এই চারিটি নিয়মের প্রয়োগের কতকগুলি উদাহরণ দেওয়া হইল।

3·5. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the value of* $\dfrac{2a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 6a^{-\frac{7}{3}}}{3a^{-\frac{5}{3}} \times 4a^{\frac{3}{2}}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{2 \times 6}{3 \times 4} \cdot a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{7}{3}+\frac{5}{3}-\frac{3}{2}} = a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

---

* যথা, $a = -4$ হইলে, $a^{\frac{1}{2}}$ অর্থহীন হইবে।

Ex. 2. *Simplify* $(x^a y^{-b})^3 \times (x^3 y^2)^{-a}$.

প্রদত্ত রাশি $= x^{3a} y^{-3b} \times x^{-3a} y^{-2a} = x^{3a-3a} \times y^{-3b-2a}$

$$= x^0 y^{-(2a+3b)} = \frac{1}{y^{2a+3b}}.$$

Ex. 3. *Find the value of* $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

$$\left(\tfrac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\tfrac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left\{\left(\tfrac{3}{2}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}} = \tfrac{3}{2}.$$

Ex. 4. *Express in a simplified form* :

(i) $\sqrt[3x]{a^3} \div \sqrt[x]{a^2}$;

(ii) $\sqrt[3]{ab^{-1}c^{-2}} \times (a^{-1}b^{-2}c^{-4})^{-\frac{1}{6}}$.

(i) প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{3}{3x}} \div a^{\frac{2}{x}} = \dfrac{a^{\frac{1}{x}}}{a^{\frac{2}{x}}} = a^{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}} = a^{-\frac{1}{x}}$.

(ii) প্রদত্ত রাশি $= a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}} c^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}}$

$$= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \times b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \times c^{-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{1}{2}} \times b^0 \times c^0 = a^{\frac{1}{2}}.$$

Ex. 5. *Multiply* $7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1$ by $3x^{\frac{1}{3}} + 1$.

$$\begin{array}{r} 7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ 3x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ \hline 21x - 6x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} \qquad \\ + 7x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1 \\ \hline 21x + x^{\frac{2}{3}} + \quad x^{\frac{1}{3}} + 1 \end{array}$$

Ex. 6. *Divide* $a^{\frac{3n}{2}} - a^{-\frac{3n}{2}}$ *by* $a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}$.

ভাগফল $= \left\{\left(a^{\frac{n}{2}}\right)^3 - \left(a^{-\frac{n}{2}}\right)^3\right\} \div \left(a^{\frac{n}{2}} - a^{-\frac{n}{2}}\right)$

$$= \left(a^{\frac{n}{2}}\right)^2 + \left(a^{\frac{n}{2}}\right)\left(a^{-\frac{n}{2}}\right) + \left(a^{-\frac{n}{2}}\right)^2$$

$$= a^n + 1 + a^{-n}.$$

Ex. 7. *Find the square of* $x^{2^{n-1}}$ *and hence find the product* $\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right)$.

$$\left(x^{2^{n-1}}\right)^2 = x^{2^{n-1}\times 2} \qquad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$$
$$= x^{2^{n-1+1}} = x^{2^n}.$$

আবার

$$\left(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}\right)\left(x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}\right) = \left(x^{2^{n-1}}\right)^2 - \left(y^{2^{n-1}}\right)^2$$
$$= x^{2^n} - y^{2^n}.$$

Ex. 8. *Simplify* $\left\{\dfrac{\left(9^{n+\frac{1}{4}}\right)\sqrt{3.3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$. [*S. F. 1958*]

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \left\{\frac{(3^2)^{n+\frac{1}{4}}.3^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{n}{2}}}{3\,.\,3^{-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}} = \left\{\frac{3^{2n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{n}{2}}}{3^{1-\frac{n}{2}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$$
$$= \left\{3^{\left(2n+1+\frac{n}{2}\right)-\left(1-\frac{n}{2}\right)}\right\}^{\frac{1}{n}} = (3^{3n})^{\frac{1}{n}} = 3^3 = 27.$$

Ex. 9. *Show that* $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}} = 1.$

$$\text{বাম পক্ষ} = \sqrt[bc]{x^{b-c}} \times \sqrt[ca]{x^{c-a}} \times \sqrt[ab]{x^{a-b}}$$
$$= x^{\frac{b-c}{bc}} \times x^{\frac{c-a}{ca}} \times x^{\frac{a-b}{ab}}$$
$$= x^{\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)} = x^0 = 1.$$

Ex. 10. *Simplify* $\dfrac{(bc)^{b-c}\,(ca)^{c-a}\,(ab)^{a-b}}{(a^{b-c}\,b^{c-a}\,c^{a-b})^{-1}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{b^{b-c}\times c^{b-c}\times c^{c-a}\times a^{c-a}\times a^{a-b}\times b^{a-b}}{a^{-(b-c)}\times b^{-(c-a)}\times c^{-(a-b)}}$$
$$= \frac{b^{b-c+a-b}\times c^{b-c+c-a}\times a^{c-a+a-b}}{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}}$$
$$= \frac{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}}{a^{c-b}\times b^{a-c}\times c^{b-a}} = 1.$$

Ex. 11. *If* $a=b^x$, $b=c^y$ *and* $c=a^z$, *show that* $xyz=1$.

এখানে, $a=b^x=(c^y)^x=c^{xy}=(a^z)^{xy}=a^{xyz}$.

$\therefore \quad a=a^{xyz}. \qquad \therefore \quad xyz=1.$

Ex. 12. *If* $x^y=y^x$, *show that* $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=x^{\frac{x}{y}-1}$, *and if* $x=2y$, *prove that* $y=2$.

যেহেতু, $x^y=y^x$, $\therefore \; y^{x/y}=x$ [উভয় পক্ষের y-তম মূল লইয়া]

$\therefore \quad \frac{1}{y^{x/y}}=\frac{1}{x}$, অথবা $\frac{x^{x/y}}{y^{x/y}}=\frac{x^{x/y}}{x}$

[উভয় পক্ষকে $x^{x/y}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

$\therefore \quad \left(\frac{x}{y}\right)^{x/y}=x^{\frac{x}{y}-1}.$

এক্ষণে যদি $x=2y$ হয়, তবে $\frac{x}{y}=2$

অতএব, $(2)^2=x^{2-1}$. $\quad \therefore \; 4=x$.

কিন্তু $x=2y$, $\quad \therefore \; 2y=4. \quad \therefore \; y=2.$

Ex. 13. *If* $2^{x+3}+2^{x+1}=320$ *find the value of* x.

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে, $2^x.2^3+2^x.2=320$,

অথবা, $2^x(2^3+2)=320$, $\qquad$ অথবা, $2^x.10=320$.

$\therefore \quad 2^x=32=2^5. \qquad \therefore \quad x=5.$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরে প্রদর্শিত সমীকরণের ন্যায় সূচকে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত সমীকরণগুলিকে "সূচক সমীকরণ" (Exponential Equation) বলে।

Ex. 14. *If* $x=3+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$, *prove that*

$$x^3-9x^2+18x-12=0.$$

প্রদত্ত শর্তানুযায়ী, $x-3=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$. $\quad \therefore \; (x-3)^3=\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3$.

$$\therefore \quad x^3-9x^2+27x-27=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=3^2+3+3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(x-3)$$

$$=12+9(x-3).$$

$\therefore \quad x^3-9x^2+18x-12=0.$

Examples III

1. Express with positive indices :

(i) $2x^{-\frac{1}{2}}$. (ii) $5x^{-\frac{2}{5}}$. (iii) $3x^{-2}a^{-3}$.

(iv) $\frac{1}{5x^{-\frac{1}{4}}}$. (v) $\frac{\sqrt[4]{a^b}}{a^c}$. (vi) $\frac{x^2y^{-3}}{z^5}$.

(vii) $\frac{3a^{-3}x^2}{5y^2b^{-3}}$. (viii) $\frac{1}{5\sqrt[5]{x^{-3}}}$. (ix) $a^{-2}x^{-\frac{1}{2}}\div a^{-3}$.

(x) $\sqrt[4]{a^{-3}}\div\sqrt[5]{a^7}$.

2. Express with radical sign and positive indices.

(i) $x^{-\frac{3}{5}}$. (ii) $4x^{-\frac{1}{3}}$. (iii) $\frac{1}{5x^{\frac{1}{5}}}$ (iv) $\frac{2}{a^{-\frac{3}{4}}}$

(v) $x^{-\frac{3}{2}}\div 2a^{-\frac{1}{2}}$. (vi) $\frac{\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^2}}$. (vii) $\sqrt[a]{x^3}\div\sqrt[2a]{x^5}$.

(viii) $\sqrt[3]{a^{-x}}\div\sqrt[3]{a^{-2x}}$. (ix) $\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt{a^{-3}}$. (x) $\frac{3a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}}$.

3. Find the value of :

(i) $32^{\frac{3}{5}}$. (ii) $(16)^{-\frac{3}{4}}$. (iii) $\sqrt{36^{-3}}$.

(iv) $\sqrt[3]{(125)^{-1}}$. (v) $243^{\frac{3}{5}}$. (vi) $(\frac{8}{27})^{\frac{1}{3}}$.

(vii) $\sqrt[5]{\left(\frac{32}{243}\right)^{-8}}$. (viii) $\left(\frac{243^{\frac{1}{5}}}{343^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}$. (ix) $\frac{2}{8^{-\frac{2}{3}}}\times\frac{\sqrt[5]{2}}{4^{-\frac{2}{5}}}$.

Simplify and express with positive indices :

4. (i) $\left(\frac{27x^3}{8a^{-6}}\right)^{-\frac{2}{3}}$. (ii) $\left\{\sqrt[4]{\left(x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}\right)^3}\right\}^{-\frac{2}{3}}$.

(iii) $\left\{x^{\frac{1}{n}}\times\sqrt[n]{x^{-\frac{2}{n}}}\right\}^{\frac{n}{n-2}}$.

5. (i) $\sqrt[6]{a^4x^6}\times(a^{\frac{2}{3}}x^{-1})^2\div(a^{-2}x)^{-1}$.

(ii) $\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}}\div\sqrt{y\sqrt[3]{x}}$.

6. (i) $\left(a^{-\frac{1}{2}}x^{3}\sqrt{ax^{-\frac{1}{3}}\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

(ii) $\dfrac{b}{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{ac^{-1}}\times\dfrac{\sqrt[3]{c^{4}}}{\sqrt{b}}\times\dfrac{\sqrt{b^{-1}}}{a^{-\frac{1}{6}}}$.

7. (i) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-\frac{4}{3}}\ c^{-1}}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[6]{b^{3}}}{a^{2}c^{-1}}\right)^{-2}$.

(ii) $\left(\sqrt[7]{\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{-3}}{x^{\frac{1}{2}}a^{-3}}}\times\sqrt[9]{\dfrac{a^{\frac{4}{5}}\ x^{-\frac{2}{7}}}{xa^{-1}}}\right)$.

Simplify :

8. $(a^{n^{2}-1})^{\frac{n}{n+1}}+\dfrac{\sqrt[n]{a^{2n}}}{a}-\left(a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{n^{2}-1}-\dfrac{\sqrt{a^{2n}}}{a^{n-1}}$.

9. $\left\{\dfrac{x^{m-n}}{\sqrt[n]{x^{n^{2}-mn}}}\times x^{2(n-m)}\right\}^{r}$.

10. (i) $\left(x^{1+\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p}{p+q}}\div\sqrt[q]{\dfrac{x^{2p}}{(x^{-1})^{-p}}}$. (ii) $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{y^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{6}}}\right)^{2}\div\dfrac{y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Express in Simplest form

11. (i) $\left(8^{\frac{2}{3}}+4^{\frac{3}{2}}\right)\times 16^{-\frac{3}{4}}$. (ii) $\left\{\sqrt[3]{4}\times\dfrac{1}{\sqrt[6]{8}}\times\sqrt[12]{2^{-1}}\right\}^{4}$.

12. (i) $\dfrac{2^{n+4}-2\times 2^{n+1}}{2^{n+2}\times 3}$. (ii) $\dfrac{2^{n}\times(2^{n-1})^{n}}{2^{n+1}\times 2^{n-1}}\times\dfrac{1}{4^{-n}}$.

13. (i) $\dfrac{3^{2n+4}-7.3^{2n+2}}{2\times 3^{n+1}}$. (ii) $\dfrac{3^{n}-8.3^{n-2}}{3^{n}-3^{n-1}}$.

14. (i) $\dfrac{\left\{9^{n}.3^{2}\times\dfrac{1}{3^{-n}}\right\}-27^{n}}{3^{3n}\times 8}$. (ii) $\left\{\dfrac{4^{m+\frac{1}{2}}\times\sqrt{2.2^{m}}}{2\sqrt{2^{-m}}}\right\}^{\frac{1}{m}}$.

[*C.U. 1947*]

15. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^{3}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. 16. $\dfrac{2^{a}.(2^{a-1})^{a}}{2^{a+1}.2^{a-1}}.\left\{\dfrac{8^{a/3}}{4}\right\}^{-a}$.

17. $\dfrac{\left(p+\frac{1}{q}\right)^p\left(p-\frac{1}{q}\right)^q}{\left(q+\frac{1}{p}\right)^p\left(q-\frac{1}{p}\right)^q}$.

18. $\dfrac{\left\{\left(a^m\right)^{\frac{1}{r}}\left(a^q\right)^{\frac{1}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}\left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right\}^{mq}}+\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^q\right\}^r$

19. Express as a whole number

$$(27)^{\frac{2}{3}}+(16)^{\frac{3}{4}}-\frac{2}{(8)^{-\frac{2}{3}}}+\frac{\sqrt[3]{2^{-1}}}{4^{-\frac{2}{3}}}.$$

20. Write down the value of

(i) $(x^{\frac{1}{2}}-3)(x^{\frac{1}{3}}-3)$. (ii) $(x^m-y^n)(x^{-m}+y^{-n})$.

(iii) $\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$.

(iv) $(5x^a y^b-3x^{-a} y^{-b})(4x^a y^b+5x^{-a} y^{-b})$.

(v) $\left\{(a+b)^{\frac{1}{2}}+(a-b)^{\frac{1}{2}}\right\}^2$.

Show that :

21. $\sqrt{x^{-1}y}\times\sqrt{y^{-1}z}\times\sqrt{z^{-1}x}=\sqrt{xyz}$.

22. $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^a\times\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^b\times\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^c=1$.

23. $(x^a)^{b-c}\times(x^b)^{c-a}\times(x^c)^{a-b}=1$.

24. $\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m}\times\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n}\times\left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l}=1$.

25. $\left(a^{\frac{1}{x-y}}\right)^{\frac{1}{x-z}}\times\left(a^{\frac{1}{y-z}}\right)^{\frac{1}{z-x}}\times\left(a^{\frac{1}{z-x}}\right)^{\frac{1}{z-y}}=1$.

26. $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}=1$.

27. $\sqrt[bc]{\dfrac{x^b}{x^c}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^c}{x^a}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^a}{x^b}}=1$.

28. $\left(\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{1}{ab}}=1$.

29. $\left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+l^2}}{x^{-nl}}\right)^{n-l} \times \left(\dfrac{x^{l^2+m^2}}{x^{-lm}}\right)^{l-m} = 1.$

30. $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} \times \left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}} = 1.$

31. $\left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m+n-l} \times \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n+l-m} \times \left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l+m-n} = 1.$

32. $\dfrac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \dfrac{1}{x^{a-b}+1+x^{c-b}} + \dfrac{1}{x^{a-c}+x^{b-c}+1} = 1.$

33. If $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$, show that
$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1.$

34. If $a = x^{q+r}y^p$, $b = x^{r+p}y^q$, $c = x^{p+q}y^r$, show that
$a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q} = 1.$

35. If $a^x = b^y = c^z$ and $b^2 = ac$, prove that
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}.$$

36. If $m = a^x$, $n = a^y$, $a^2 = (m^y n^x)^z$, show that
$xyz = 1.$

37. If $\left(\dfrac{y}{z}\right)^a \left(\dfrac{z}{x}\right)^b \left(\dfrac{x}{y}\right)^c = 1$, prove that
$$\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{1}{b-c}} = \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{c-a}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{a-b}}.$$

38. Simplify $\sqrt[10]{a^8\sqrt{a^8\sqrt{a^{-8}}}}.$

39. Prove that

(i) if $x = 3^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5}$, then $x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$

(ii) if $x = 1 + 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}$, then $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0.$

40. (i) If $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \times \sqrt[3]{z} = 0$, prove that $(x+y+z)^3 = 27xyz.$

(ii) If $a\sqrt[3]{x^2} + b\sqrt[3]{x} + c = 0$, show that
$a^3x^2 + b^3x + c^3 = 3abcx.$

(iii) If $x = \sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3} + a\}} - \sqrt[3]{\{\sqrt{a^2+b^3} - a\}}$,
show that $x^3 + 3bx - 2a = 0.$

41. Find the product of

(i) $\left(x^{\frac{1}{3}}+1+x^{-\frac{1}{3}}\right)\times\left(x^{\frac{1}{3}}+1-x^{-\frac{1}{3}}\right)$.

(ii) $\left(2-x^{\frac{1}{2}}+x\right)\times\left(2+x^{\frac{1}{2}}+x\right)$.

(iii) $(a^{x}+2+3a^{-x})\times(a^{x}-2+3a^{-x})$.

(iv) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+2\right)\times\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}+3\right)$.

(v) $\left(x+x^{\frac{3}{2}}+x^{2}\right)\times\left(x^{\frac{1}{2}}-x\right)$.

42. Divide

(i) $\left(x^{\frac{4}{3}}-8x^{\frac{1}{3}}y\right)$ by $\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+4y^{\frac{2}{3}}\right)$.

(ii) $\left(x^{\frac{2}{3}}+2\right).\left(x^{\frac{2}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}\right)$ by $\left(x^{\frac{2}{3}}+4+4x^{-\frac{2}{3}}\right)$.

(iii) $\left(x-7x^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)$ by $x^{\frac{1}{2}}\left(x-5\sqrt{x}-14\right)$.

43. Solve :

(i) $3^{x}+81=10.3^{x}$. (ii) $7.2^{x+1}-8.2^{x-2}=12$.

(iii) $4^{x+1}+4^{x-1}=17$. (iv) $9^{x+1}=3^{2x+1}+4374$.

(v) $ba^{x-2}=ab^{x-2}$ ($a\neq b$).

44. (i) If $a^{3}=b^{4}$, prove that $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{4}}$.

(ii) If $(a^{n^3})^{n}=(a^{3^n})^{3}$, prove that $\left(n^{4}\right)^{\frac{1}{n+1}}=3$.

45. Show that, if

$$(1-x^{3})^{\frac{1}{3}}(y-z)+(1-y^{3})^{\frac{1}{3}}(z-x)+(1-z^{3})^{\frac{1}{3}}(x-y)=0,$$

and x, y, z are all unequal, then

$$(1-x^{3})(1-y^{3})(1-z^{3})=(1-xyz)^{3}.$$

ANSWERS

1. (i) $\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$; (i) $\frac{5}{x^{\frac{2}{5}}}$; (iii) $\frac{3}{x^{2}a^{3}}$; (iv) $\frac{1}{5}x^{\frac{1}{2}}$;

(v) $a^{\frac{1}{2}b-c}$; (vi) $\frac{x^{2}}{y^{3}z^{6}}$; (vii) $\frac{3x^{2}b^{3}}{5a^{3}y^{2}}$; (viii) $\frac{1}{5}x^{\frac{3}{5}}$;

(ix) $\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}}$; (x) $\frac{1}{a^{\frac{23}{6}}}$.

2. (i) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; (ii) $\frac{4}{\sqrt[3]{x}}$; (iii) $\frac{1}{5\sqrt[6]{x}}$; (iv) $2\sqrt[4]{a^3}$;

(v) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x^3}}$; (vi) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; (vii) $\sqrt[2a]{x}$; (viii) $\sqrt[3]{a^x}$;

(ix) $\sqrt[6]{a^{13}}$; (x) $\frac{3}{\sqrt{a}}$.

3. (i) 4; (ii) $\frac{1}{8}$; (iii) $\frac{1}{216}$; (iv) $\frac{1}{5}$; (v) 27;
(vi) $\frac{2}{3}$; (vii) $\frac{6561}{256}$; (viii) $\frac{7}{3}$; (ix) 16.

4. (i) $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{x^2a^4}$; (ii) $\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{4}}}$; (iii) x.

5. (i) 1; (ii) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$. 6. (i) x; (ii) c.

7. (i) $\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$; (ii) $a^{\frac{7}{10}}/x^{\frac{9}{14}}$. 8. 0. 9. 1.

10. (i) 1; (ii) $(xy)^{\frac{13}{12}}$. 11. (i) $\frac{3}{2}$; (ii) $\sqrt[3]{2}$.

14. (i) 1; (ii) 8. 15. $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b}$. 16. 1. 17. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$.

18. $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$. 19. 11. 20. (i) $x^{\frac{5}{6}}-3x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}+9$.

(ii) $\frac{x^m}{y^n}-\frac{y^n}{x^m}=(x^{2m}-y^{2n})/(x^my^n)$. (iii) $\frac{1}{27}a-a^{-1}+a^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}}$.

(iv) $20x^{2a}y^{2b}+13-15x^{-2a}y^{-2b}$. (v) $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$. 38. a.

41. (i) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1-x^{-\frac{2}{3}}$; (ii) $4+3x+x^2$; (iii) $a^{2x}+2+9a^{-2x}$;

(iv) $x^{\frac{5}{6}}+3x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+6+x^{-\frac{1}{6}}+2x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{5}{6}}$; (v) $x^{\frac{3}{2}}-x^3$.

42. (i) $x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}-2y^{\frac{1}{3}})$; (ii) $x^{\frac{2}{3}}-2$; (iii) 1.

43. (i) 2; (ii) 0. (iii) 1; (iv) 3; (v) 3.

চতুর্থ অধ্যায়

উদ্‌ঘাতন (Involution)

4·1. উদ্‌ঘাতন।

কোন সংখ্যা বা রাশিকে সেই সংখ্যা বা রাশির দ্বারা এক বা একাধিকবার উপর্যুপরি গুণ করিয়া ইহার দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি যে-কোন ঘাত নির্ণয়-কার্যের সাধারণ নাম **উদ্‌ঘাতন** বা **শক্তি-উন্নয়ন** (Involution)। সরাসরি গুণন দ্বারা সবসময়েই কোন সংখ্যা বা রাশির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি যে-কোন ঘাত নির্ণয় বা উদ্‌ঘাতন সম্পন্ন করা যায়। একপদ রাশির যে-কোন ঘাত নির্ণয়কার্য পূর্ববর্তী সূচকতত্ত্ব অধ্যায়েই আলোচিত হইয়াছে।

দুই বা ততোধিক একপদ রাশির গুণনকার্যে গুণফলের চিহ্ন-সংক্রান্ত নিয়মের এখানে উল্লেখ অপ্রাসঙ্গিক হইবে না। ঋণাত্মক বা ধনাত্মক যে-কোন একপদ রাশিকে **যুগ্ম ঘাতে** উন্নীত করিলে **লব্ধ গুণফল সতত ধনাত্মক** হইবে এবং ইহাকে **অযুগ্ম ঘাতে** উন্নীত করিলে **রাশিটি যে চিহ্নবিশিষ্ট, লব্ধ গুণফল সেই চিহ্নবিশিষ্ট** হইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

$$(x^2)^5 = x^{2\times 5} = x^{10}. \qquad (2x)^4 = 2^4 \times x^4 = 16x^4.$$

$$(-2x)^6 = (-2)^6 \times x^6 = 64x^6.$$

$$(-3a^2)^3 = (-3)^3 \times (a^2)^3 = -27a^6.$$

$$(-2x^2yz)^2 = (-2)^2.(x^2)^2.(y)^2.(z)^2 = 4x^4y^2z^2.$$

$$\left(\frac{3ab^2}{4x^2y}\right)^3 = \frac{3^3.a^3.(b^2)^3}{4^3.(x^2)^3.y^3} = \frac{27a^3b^6}{64x^6y^3}\text{; ইত্যাদি।}$$

4·2. দ্বিপদ রাশির ঘাতের বিস্তৃতি (Expansion of a Binomial)।

এখন $(x+y)$ এই দ্বিপদরাশিকে বিভিন্ন ঘাতে উন্নীত করিয়া যে সকল বিস্তৃতি (expansion) পাওয়া যায় সেগুলি পর্যবেক্ষণ করিয়া যে সমস্ত বিশেষত্ব আমরা দেখিতে পাই, তাহা আমরা আলোচনা করিব। এতন্মধ্যে $(x+y)^2$ এবং $(x+y)^3$ এই দুইটির বিস্তৃতির সহিত শিক্ষার্থীরা পূর্বেই পরিচিত হইয়াছে। নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলি আমরা সরাসরি পর পর গুণ করিয়া পাই।

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2.$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3.$$
$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4.$$
$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5.$$
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6.$$
$$(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7\text{ ; ইত্যাদি।}$$

পরবর্তী এক অধ্যায়ে আরও সাধারণভাবে **দ্বিপদ উপপাদ্য** (*Binomial Theorem*) আলোচিত হইয়াছে ; যথা,

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}y^3+\cdots$$
$$\cdots+\frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2}+nxy^{n-1}+y^n. \quad \text{[n অখণ্ড ধনরাশি]}$$

ইহার সূচক n-এর স্থলে 2, 3, 4,.... প্রভৃতি সংখ্যা বসাইয়া উপরের বিস্তৃতিগুলি সহজেই পাওয়া যায়।

উপরের বিস্তৃতিগুলি হইতে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তসমূহে উপনীত হই :

(i) $(x+y)$-এর যে-কোন ঘাতের বিস্তৃতির পদসংখ্যা $(x+y)$-এর ঘাতের সূচক-সংখ্যা অপেক্ষা 1 বেশী।

যথা, $(x+y)^6$ এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা 7; $(x+y)^{10}$-এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা 11 ; ইত্যাদি।

(ii) বিস্তৃতির প্রথম পদ y-বর্জিত এবং শেষ পদ x-বর্জিত, এবং এই দুই পদে x এবং y-এর ঘাতের সূচক, $(x+y)$ কে যে ঘাতে উন্নয়ন করা হইতেছে, তাহার সূচকের সমান। বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় প্রভৃতি পরবর্তী প্রত্যেক পদে x-এর ঘাতের সূচক 1 করিয়া কমিতেছে, এবং y-এর ঘাতের সূচক 1 করিয়া বাড়িতেছে। সুতরাং, বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে x ও y-এর ঘাতের সূচক-সমষ্টি সর্বদাই সমান, এবং উহা $(x+y)$ যে ঘাতে উন্নীত হইতেছে, তাহার সূচকের সমান।

সূচকতত্ত্ব হইতে আমরা জানি যে, $a^0=1$, সুতরাং, প্রথম এবং শেষ পদে y এবং x-এর ঘাতের সূচক 0 কল্পনা করিয়া লইতে পারি।

(iii) বিস্তৃতির প্রথম এবং শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সাংখ্য-সহগগুলি পরস্পর সমান।

(iv) বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদের সহগ 1. দ্বিপদরাশির ঘাত-উন্নয়নের সূচক n (অখণ্ড ধনরাশি) হইলে [অর্থাৎ $(x+y)^n$-এর বিস্তৃতির ক্ষেত্রে] দ্বিতীয় (ও শেষ হইতে দ্বিতীয়) পদের সাংখ্য-সহগ n হইবে। দ্বিতীয় পদের সহগ n এবং x-এর ঘাতের সূচক $(n-1)$ গুণ করিয়া, দ্বিতীয় পদের অবস্থিতি-নির্দেশক সংখ্যা, অর্থাৎ 2 দ্বারা ভাগ করিলে তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। সেইরূপ তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ এবং সেই পদের x-এর ঘাতের সূচক-সংখ্যা গুণ করিয়া গুণফলকে 3 (অর্থাৎ তৃতীয় পদের স্থান-নির্দেশক সংখ্যা) দ্বারা ভাগ করিলে চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ পাওয়া যায়। এইরূপ পর পর সাংখ্য-সহগগুলি নির্ণয় করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $(x+y)^8$-এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা হইবে 9. প্রথম ও শেষ পদ যথাক্রমে x^8 এবং y^8. উপরের নিয়মানুসারে দ্বিতীয় পদে সাংখ্য-সহগ 8, x-এর ঘাত 7 এবং y-এর ঘাত 1, অর্থাৎ পদটি $8x^7y$. তৃতীয় পদের সাংখ্য-সহগ হইবে $\frac{8\times 7}{2}$ বা 28, x-এর ঘাত 6 এবং y-এর ঘাত 2, অর্থাৎ তৃতীয় পদ $28x^6y^2$. সেইরূপ চতুর্থ পদের সাংখ্য-সহগ $\frac{28\times 6}{3}$ বা 56, অর্থাৎ পদটি হইবে $56x^5y^3$. পঞ্চম পদের সাংখ্য-সহগ $\frac{56\times 5}{4}$ বা 70, এবং পদটি $70x^4y^4$. পরবর্তী পদগুলিতে (প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদের সাংখ্য-সহগগুলি সমান হওয়ায়) সাংখ্য-সহগগুলি যথাক্রমে 56, 28, 8 এবং 1 হইবে। সুতরাং,

$$(x+y)^8 = x^8+8x^7y+28x^6y^2+56x^5y^3+70x^4y^4 +56x^3y^5+28x^2y^6+8xy^7+y^8. \quad \cdots \quad (1)$$

এখানে লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক পদে x এবং y-এর ঘাতের সূচক-সমষ্টি 8.

4·3. উপরের অনুচ্ছেদে $(x+y)$-এর ঘাতের বিস্তৃতি নির্ণয়ের যে নিয়ম দেওয়া হইল, তাহাতে x এবং y-এর পরিবর্তে যে-কোন পদ বসাইলেও উহা প্রযোজ্য হইবে, এবং এই পদদুইটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন সহগযুক্ত হইতে পারে।

এইরূপে y-এর পরিবর্তে $-y$ বসাইয়া পাই

$$(x-y)^5 = x^5+5x^4(-y)+\frac{5\times 4}{2}.x^3(-y)^2 +\frac{5\times 4\times 3}{2.3}x^2(-y)^3+\frac{5\times 4\times 3\times 2}{2.3.4}x(-y)^4+(-y)^5$$

$$= x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5. \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

এখানে দ্রষ্টব্য যে পদগুলি পর পর বিপরীত চিহ্নযুক্ত, অযুগ্ম পদগুলি ধনাত্মক, এবং যুগ্ম পদগুলি ঋণাত্মক।

দ্রষ্টব্য 1. এখানে লক্ষ্যণীয় যে (1)-এর সব পদই ধনাত্মক কিন্তু (2)-এর প্রথম পদ ধনাত্মক, দ্বিতীয় পদ ঋণাত্মক এবং এইরূপে পদগুলি পর পর একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক। $(x+y)$ এবং $(x-y)$ এইরূপ রাশিদ্বয়কে একই ঘাতে উন্নীত করিলে উহাদের বিস্তৃতির পার্থক্য এই হয় যে, প্রথম বিস্তৃতির সব পদই ধনাত্মক হইবে কিন্তু দ্বিতীয় বিস্তৃতির প্রথম পদ ধনাত্মক এবং তারপর পদগুলি পর্যায়ক্রমে একটি ঋণাত্মক এবং একটি ধনাত্মক হইবে।

আর একটি উদাহরণস্বরূপ, মনে করি $(2a-3b^2)^4$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে $2a$ কে x এবং $-3b^2$ কে y কল্পনা করিয়া নিয়মানুসারে

$$(2a-3b^2)^4=(2a)^4+4.(2a)^3(-3b^2)+\frac{4\times3}{2}\cdot(2a)^2(-3b^2)^2$$

$$+\frac{4\times3\times2}{2.3}\cdot(2a).(-3b^2)^3+(-3b^2)^4$$

$$=16a^4-96a^3b^2+216a^2b^4-216ab^6+81b^8.$$

দ্রষ্টব্য 2. এখানে বিস্তৃতির শেষপ্রাপ্ত আকারে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরস্থ সহগগুলি সমান নয়, বা প্রত্যেক পদে a এবং b-এর ঘাতের সূচকসমষ্টিও সমান নয়। প্রকৃতপক্ষে § 4·2 তে প্রদত্ত নিয়মগুলি পদদুইটির সহগ 1 এবং ঘাত 1 হইলে প্রযোজ্য। অন্যান্য ক্ষেত্রে উপরের উদাহরণের ন্যায় পদদুইটিকে x এবং y কল্পনা করিয়া নিয়মানুযায়ী বিস্তৃতি লিখিয়া সরল করিতে হইবে।

4·4. ত্রিপদ ও বহুপদ রাশির বর্গ (Square of trinomial and multinomial expressions)।

দ্বিপদরাশির বর্গ-নির্ণয়ের সূত্র $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$-এর সাহায্যে নিম্নলিখিতরূপে ত্রিপদ বা বহুপদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গ নির্ণয় করিতে পারি। ত্রিপদরাশিসমষ্টির ক্ষেত্রে উহাদের মধ্যে দুইটি পদকে বন্ধনী-চিহ্নের মধ্যে লইয়া একটি রাশি কল্পনা করিয়া উপরের সূত্রসাহায্যে তিন পদের সমষ্টি বা অন্তরফলের বর্গ নির্ণয় করা যায়। যথা,

$$\mathbf{(a+b+c)^2}=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b).c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=\mathbf{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.}$$

সেইরূপ, $(a+b+c+d)^2=\{(a+b)+(c+d)\}^2$
$$=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2ad+2bc+2bd+c^2+2cd+d^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

অনুরূপভাবে,
$$(a+b+c+d+e+\cdots)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\cdots$$
$$+2ab+2ac+2ad+2ae+\cdots$$
$$+2bc+2bd+2bc+\cdots$$
$$+2cd+2ce+\cdots\ +2de+\cdots$$

অর্থাৎ যে-কোন পদসমষ্টির বর্গ
= প্রত্যেক পদের বর্গসমূহের সমষ্টি
+ প্রত্যেক পদের সহিত পরবর্তী প্রত্যেক পদের গুণফল-সমূহের সমষ্টির দ্বিগুণ।

এখানে $a,\ b,\ c,$ ইত্যাদির পরিবর্তে ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সহগযুক্ত যে-কোন পদ বসাইলেও এই সূত্র প্রযোজ্য হইবে।

Ex. 1. $(a-b-c)^2=\{a+(-b)+(-c)\}^2$
$$=a^2+(-b)^2+(-c)^2+2a(-b)+2a(-c)+2(-b)(-c)$$
$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc.$$

Ex. 2. $(3x-4y^2+2z^3-w)^2$
$$=(3x)^2+(-4y^2)^2+(2z^3)^2+(-w)^2$$
$$+2(3x)(-4y^2)+2(3x)(2z^3)+2(3x)(-w)$$
$$+2(-4y^2)(2z^3)+2(-4y^2)(-w)+2(2z^3)(-w)$$
$$=9x^2+16y^4+4z^6+w^2-24xy^2+12xz^3-6xw$$
$$-16y^2z^3+8y^2w-4z^3w.$$

4·5. ত্রিপদরাশির ঘন (Cube of a trinomial)।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে [§ 2·12 অনুসিদ্ধান্ত] দেখানো হইয়াছে যে,
$$\mathbf{(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc.$$

এই সূত্রে a, b, c-এর পরিবর্তে যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সহগযুক্ত পদ বসাইয়া যে-কোন ত্রিপদরাশির ঘন নির্ণয় করা যায়।

Ex. $(2p-3q+4r)^3$

$$=(2p)^3+(-3q)^3+(4r)^3+3(2p)^2(-3q+4r)+3(-3q)^2(2p+4r)+3(4r)^2(2p-3q)+6(2p)(-3q)(4r)$$
$$=8p^3-27q^3+64r^3-36p^2q+48p^2r+54pq^2+108q^2r+96pr^2-144qr^2-144pqr.$$

4·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Raise to the indicated powers :*

(i) $(2x^3y)^5$.　　(ii) $\left(-\dfrac{2x^3}{3y}\right)^8$.　　(iii) $\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(i) $(2x^3y)^5=(2)^5.(x^3)^5.(y)^5=32x^{15}y^5$.

(ii) $\left(-\dfrac{2x^3}{3y}\right)^8=\dfrac{(-2)^8(x^3)^8}{(3)^8(y)^8}=\dfrac{256x^{24}}{6561y^8}$.

(iii) $\left(-\dfrac{3x^5}{5a^3}\right)^3=\dfrac{(-3)^3(x^5)^3}{(5)^3(a^3)^3}=-\dfrac{27x^{15}}{125a^9}$.

Ex. 2. *Expand* $(3x-2a^2)^4$.

$$(3x-2a^2)^4=(3x)^4+4.(3x)^3(-2a^2)+\frac{4\times3}{2}(3x)^2(-2a^2)^2+\frac{4\times3\times2}{2\times3}(3x)(-2a^2)^3+(-2a^2)^4$$
$$=81x^4-216x^3a^2+216x^2a^4-96xa^6+16a^8.$$

Ex. 3. *Expand* $(x-y)^6$.

এখানে বিস্তৃতির 7টি পদ, এবং নিয়মানুসারে প্রথম চারটি পদের সাংখ্য-সহগ 1, 6, $\dfrac{6\times5}{2}$, $\dfrac{6\times5\times4}{2\times3}$ অর্থাৎ 1, 6, 15, 20, এবং যেহেতু প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদগুলির সাংখ্য-সহগগুলি সমান, অতএব, শেষ তিনটি পদের সাংখ্য-সহগ যথাক্রমে 15, 6 এবং 1.

$$\therefore\ (x-y)^6=x^6+6x^5(-y)+15x^4(-y)^2+20x^3(-y)^3+15x^2(-y)^4+6x(-y)^5+(-y)^6$$
$$=x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6.$$

দ্রষ্টব্য। নিয়মানুসারে সাংখ্য-সহগগুলির অর্ধেক বাহির করিলে অপরগুলি সহজেই লেখা যায়।

এই সূত্রে § 4·2 তে প্রদত্ত দ্বিপদরাশির 2 হইতে 7 পর্যন্ত ঘাতের বিস্তৃতির সাংখ্য-সহগগুলি লক্ষণীয়।

Ex. 4. *Expand* $(1+x)^4(1-x)^4$ *in ascending powers of* x.

এখানে $(1+x)^4(1-x)^4=\{(1+x)(1-x)\}^4=(1-x^2)^4$

$$=1^4+4.1^3.(-x^2)+6.1^2.(-x^2)^2+4.1.(-x^2)^3+(-x^2)^4$$
$$=1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8.$$

Ex. 5. *Expand* $(1-4x+6x^2-4x^3+x^4)^2$ *and arrange in descending powers of* x.

এখানে $1-4x+6x^2-4x^3+x^4$

$$=1+4(-x)+6(-x)^2+4(-x)^3+(-x)^4$$
$$=(1-x)^4=(x-1)^4\ ;$$

$$\therefore\quad (1-4x+6x^2-4x^3+x^4)^2=\{(x-1)^4\}^2=(x-1)^8$$
$$=x^8+8x^7(-1)+28x^6(-1)^2+56x^5(-1)^3+70x^4(-1)^4$$
$$+56x^3(-1)^5+28x^2(-1)^6+8x(-1)^7+(-1)^8$$
$$=x^8-8x^7+28x^6-56x^5+70x^4-56x^3+28x^2-8x+1.$$

দ্রষ্টব্য। অষ্টম ঘাতের বিস্তৃতির সহগগুলির জন্য § 4·2 তে প্রদত্ত দৃষ্টান্ত দেখ।

Ex. 6. *If* $x=3$ *and* $y=2$, *show that*

$$x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6=1.$$

প্রদত্ত বাম পক্ষের রাশিমালা

$$=x^6+6x^5(-y)+15x^4(-y)^2+20x^3(-y)^3$$
$$+15x^2(-y)^4+6x(-y)^5+(-y)^6$$
$$=(x-y)^6=(3-2)^6 \qquad [\because\ x=3 \text{ এবং } y=2\ ]$$
$$=1^6=1.$$

Ex 7. *Find the sum of the coefficients in the expansion of* $(x+y)^7$.

যেহেতু $(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+\dots\dots$

এই বিস্তৃতিটি একটি অভেদ, এবং x ও y-এর সকল মানেই প্রযোজ্য, x এবং y-এর প্রত্যেকটির মান 1 বসাইলে বাম পক্ষ হয় $2^7=128$, এবং দক্ষিণ পক্ষ সহগগুলির যোগফলে পরিণত হয়।

$\therefore$ সহগগুলির নির্ণেয় যোগফল $=128$.

Ex. 8. *Find the value of* $100-108x+54x^2-12x^3+x^4$, *when* $x=3-\sqrt[4]{2}$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^4-4.x^3.3+6.x^2.3^2-4.x.3^3+3^4+19$

$$=(x-3)^4+19=(-\sqrt[4]{2})^4+19=2+19=21.$$

Examples IV

1. Raise to indicated powers :

(i) $(-3x^2)^5$. (ii) $(-4ab^3)^6$. (iii) $\left(\dfrac{3ab^3}{2x^2y}\right)^3$.

2. Find the squares of :

(i) $-3pq^2r^3$. (ii) $-\dfrac{5ab^2}{3}$. (iii) $\dfrac{5x^2yz^3}{3a^2b}$.

(iv) $-\dfrac{7}{9p^3q^2x}$. (v) $\dfrac{2m^2n^3}{3p^4q^{-2}}$.

3. Find the cubes of :

(i) $4a^4$. (ii) $-6m^3n^2$. (iii) $-\dfrac{1}{3mn^3}$.

(iv) $5c^5d^{-2}$. (v) $-\dfrac{9k^3l^2m^2n}{7x^5y^4z^3}$.

4. Expand :

(i) $(a+2b)^4$. (ii) $(3x^2-2y^3)^3$. (iii) $(1-2x)^7$.

(iv) $(1-a^2)^6$. (v) $(x^2+2)^5$. (vi) $(3a^2-2b^2)^5$.

(vii) $\left(\dfrac{x^2}{3}-3x\right)^4$. (viii) $(ax+by)^4+(ax-by)^4$.

5. Find the squares of :

(i) $x-2y+z$. (ii) x^2-x-1. (iii) $k^2+l^2-m^2$.

(iv) $a-\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{2}$. (v) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}x^2$. (vi) $x+2y-a+3b$.

(vii) $m+n+p-2q$. (viii) $1+2x+3x^2+4x^3$.

6. Simplify $(1+3x+2x^2)^2+(1-3x+2x^2)^2$.

7. Expand :

(i) $(a+2b-3c)^3$. (ii) $(1-3x+2x^2)^3$.

8. Expand in ascending powers of x :

$(1-6x+12x^2-8x^3)^3$.

9. Expand :

(i) $(a+b)^5(a-b)^5$. (ii) $(ax+by)^4(ax-by)^4$.

10. Expand in ascending powers of x :

(i) $(1-x)^3(1+x+x^2)^3$.

(ii) $(1-x+x^2)^3(1+x+x^2)^3$.

11. Find the values of :

(i) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-6xz+12yz$, when $x=1,\ y=2,\ z=3$.

(ii) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$, when $x=2+\sqrt{5}$.

(iii) $x^6-6x^5+15x^4-20x^3+15x^2-6x+1$, when $x=3$.

(iv) $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$, when $x=3,\ y=2$.

12. Show that $1-4x+10x^2-12x^3+9x^4=\frac{4}{9}$, if $x=\frac{1}{3}$.

13. Show that

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)-(ax+by+cz)^2 =(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2.$$

14. Find the sum of the numerical coefficients of the terms in the expansions of :

(i) $(l-m)^6$. (ii) $(l-2m)^6$. (iii) $(2x+3y)^5$.

(iv) $(4a-3b)^4$. (v) $(1-3x+2x^2)^2$.

15. Find the value of

$32x^5-240x^4+720x^3-1080x^2+810x$, when $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt[5]{5}$.

ANSWERS

1. (i) $-243x^{10}$. (ii) $4096a^6b^{18}$. (iii) $\dfrac{27a^3b^9}{8x^6y^3}$.

2. (i) $9p^2q^4r^6$. (ii) $\dfrac{25}{9}a^2b^4$. (iii) $\dfrac{25x^4y^2z^6}{9a^4b^2}$.

(iv) $\dfrac{49}{81p^6q^4x^2}$. (v) $\dfrac{4m^4n^6q^4}{9p^8}$.

3. (i) $64a^{12}$. (ii) $-216m^{9}n^{6}$. (iii) $-\dfrac{1}{27m^{3}n^{9}}$.

(iv) $\dfrac{125c^{15}}{d^{9}}$. (v) $-\dfrac{729k^{9}l^{6}m^{6}n^{3}}{343x^{15}y^{12}z^{9}}$.

4. (i) $a^4+8a^3b+24a^2b^2+32ab^3+16b^4$.

(ii) $27x^6-54x^4y^3+36x^2y^6-8y^9$.

(iii) $1-14x+84x^2-280x^3+560x^4-672x^5+448x^6-128x^7$.

(iv) $1-6a^2+15a^4-20a^6+15a^8-6a^{10}+a^{12}$.

(v) $x^{10}+10x^8+40x^6+80x^4+80x^2+32$.

(vi) $243a^{10}-810a^8b^2+1080a^6b^4-720a^4b^6+240a^2b^8-32b^{10}$.

(vii) $\frac{1}{81}x^8-\frac{4}{9}x^7+6x^6-36x^5+81x^4$.

(viii) $2a^4x^4+12a^2b^2x^2y^2+2b^4y^4$.

5. (i) $x^2+4y^2+z^2-4xy+2xz-4yz$.

(ii) $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.

(iii) $k^4+l^4+m^4+2k^2l^2-2k^2m^2-2l^2m^2$.

(iv) $a^2+\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}ab+ac-\frac{1}{4}bc$.

(v) $\frac{1}{4}-\frac{3}{2}x+\frac{19}{4}x^2-\frac{15}{2}x^3+\frac{25}{4}x^4$.

(vi) $x^2+4y^2+a^2+9b^2+4xy-2xa+6xb-4ya+12yb-6ab$.

(vii) $m^2+n^2+p^2+4q^2+2mn+2mp-4mq+2np-4nq-4pq$.

(viii) $1+4x+10x^2+20x^3+25x^4+24x^5+16x^6$.

6. $2(1+13x^2+4x^4)$.

7. (i) $a^3+8b^3-27c^3+6a^2b-9a^2c+12ab^2-36b^2c+27ac^2+54bc^2-36abc$.

(ii) $1-9x+33x^2-63x^3+66x^4-36x^5+8x^6$.

8. $1-18x+144x^2-672x^3+2016x^4-4032x^5+5376x^6-4608x^7$
$+2304x^8-512x^9$.

9. (i) $a^{10}-5a^8b^2+10a^6b^4-10a^4b^6+5a^2b^8-b^{10}$.

(ii) $a^8x^8-4a^6x^6b^2y^2+6a^4x^4b^4y^4-4a^2x^2b^6y^6+b^8y^8$.

10. (i) $1-3x^3+3x^6-x^9$.

(ii) $1+3x^2+6x^4+7x^6+6x^8+3x^{10}+x^{12}$.

11. (i) 144. (ii) 25. (iii) 64. (iv) 0.

14. (i) 0. (ii) 1. (iii) 3125. (iv) 1. (v) 0.

15. 248.

পঞ্চম অধ্যায়

মূলাকর্ষণ (Evolution)

5·1. মূলাকর্ষণ।

$x^2 = a$ হইলে, x-কে a-র বর্গমূল বলা হয় এবং ইহা $\sqrt{a}$-রূপে লিখিত হয়। সেইরূপ $x^3 = a$ হইলে, x-কে a-র ঘনমূল ($\sqrt[3]{a}$), অথবা $x^4 = a$ হইলে, x-কে a-র চতুর্থ মূল ($\sqrt[4]{a}$) বলা হয়। সাধারণভাবে $x^n = a$ হইলে, x-কে a-র n-তম মূল বলা হইয়া থাকে, এবং ইহা $\sqrt[n]{a}$-রূপে লিখিত হয়।

কোন রাশি বা রাশিমালা (কল্পনা করি a) দেওয়া থাকিলে উহার কোন নির্দিষ্ট মূল-নির্ণয় (অর্থাৎ যে রাশি বা রাশিমালাকে নির্ধারিত ঘাতে উন্নীত করিলে প্রদত্ত রাশি বা রাশিমালা পাওয়া যায় তাহা নির্ণয় করা) প্রক্রিয়াকে **মূলাকর্ষণ** (Extraction of root or Evolution) বলা হয়। প্রকৃতপক্ষে ইহা উদ্‌ঘাতন (Involution)-এর বিপরীত প্রক্রিয়া।

একপদবিশিষ্ট রাশির মূল (Root of a simple expression)।

তৃতীয় (সূচকতত্ত্ব) অধ্যায়ে বলা হইয়াছে যে, $\sqrt[n]{a}$ কে $a^{\frac{1}{n}}$ ভাবে লেখা যায়, এবং সূচকের নিয়মানুযায়ী $(abc....)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}$........। সুতরাং, একপদবিশিষ্ট রাশির কোনও মূল নির্ণয় করিতে আমরা প্রথমে উহার সাংখ্য-সহগের (যদি থাকে) প্রস্তাবিত মূল স্থির করিয়া পদটির প্রত্যেক উৎপাদকের ঘাতসূচক সংখ্যাকে প্রস্তাবিত মূল-নির্দেশক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিব। এইরূপে নির্ণীত উৎপাদক-গুলির গুণফল নির্ণেয় মূল হইবে। যথা,

$\sqrt[3]{343a^6b^3c^9}$ মূল নির্ণয় করিতে হইবে। এখানে সাংখ্য-সহগ 343-এর ঘনমূল 7, এবং ইহার অপর তিনটি উৎপাদক a^6, b^3, c^9 এর ঘাতসূচক সংখ্যা 6, 3, 9 কে মূল-নির্দেশক সংখ্যা 3 দ্বারা ভাগ করিয়া আমরা তিনটি উৎপাদক a^2, b, c^3 পাই।

$$\therefore \quad \sqrt[3]{343a^6b^3c^9} = (343a^6b^3c^9)^{\frac{1}{3}} = 7a^2bc^3.$$

অনুরূপভাবে, $\sqrt[4]{81x^5y^8z^3} = 3x^{\frac{5}{4}}y^2z^{\frac{3}{4}}$,

এবং $\sqrt{\dfrac{121a^4}{256x^8}} = \dfrac{11a^2}{16x^4}$.

মূলের চিহ্ন (Sign of the root)।

এখানে একটি কথা মনে রাখা আবশ্যক। a^n-এর ঘাত n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে a^n-এর চিহ্ন a-এর যাহা চিহ্ন তাহাই হইবে, কিন্তু n যুগ্ম সংখ্যা হইলে a-এর চিহ্ন '+' বা '−' যাহাই হউক না কেন, a^n-এর চিহ্ন '+' হইবে, অর্থাৎ $(\pm a)^n = +a^n$ হইবে। সুতরাং, কোন রাশির অযুগ্ম-তম মূলের চিহ্ন ঐ রাশির যাহা চিহ্ন তাহার সহিত এক হইবে, কিন্তু কোন ধনাত্মক* রাশির যুগ্ম-তম মূল বাহির করিতে হইলে ঐ মূল নির্ণয় করিয়া উহার অগ্রে '±' চিহ্ন বসাইতে হইবে, কারণ উভয় চিহ্ন-সংবলিত মূলকে নির্ধারিত যুগ্ম ঘাতে উন্নীত করিলে প্রদত্ত ধনাত্মক রাশি পাওয়া যাইবে।

উদাহরণস্বরূপ,

$$\sqrt[3]{343a^6b^3c^9} = 7a^2bc^3,\ \sqrt[5]{-32x^5y^3} = -2xy^{\frac{3}{5}},$$

$$\sqrt[4]{81x^5y^8z^3} = \pm 3x^{\frac{5}{4}}y^2z^{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{121a^4}{256x^8}} = \pm\frac{11a^2}{16x^4},$$

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \pm(a - b),$$ ইত্যাদি।

এখন হইতে এই অধ্যায়ের বর্গমূল (বা যে-কোন যুগ্ম-তম মূল) নির্ণয়ের ক্ষেত্রে কোন কোন স্থলে, বিশেষতঃ উত্তরমালায় আমরা '±' চিহ্ন উহ্য রাখিব। কিন্তু ছাত্রগণের উত্তর লিখিবার সময় ঐ ক্ষেত্রে '±' চিহ্ন বসানোই উচিত। যদি ঐরূপ ক্ষেত্রে নির্ণীত মূল একাধিক পদ-সংবলিত হয়, তবে ঐ রাশিমালাকে একটি বন্ধনীর মধ্যে রাখিয়া উহার অগ্রে '±' চিহ্ন বসাইতে হইবে।

অতঃপর আমরা একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল ও ঘনমূল নির্ণয় সম্বন্ধে আলোচনা করিব।

5·2. একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল (Square root of expressions containing more than one term)।

একাধিক পদবিশিষ্ট রাশিমালার বর্গমূল সাধারণতঃ দুইপ্রকারে নির্ণয় করা যায়, (A) রাশিমালাকে পূর্ণবর্গের আকারে পরিণত করিয়া, এবং (B) পরে বর্ণিত সাধারণ নিয়মানুযায়ী।

* ঋণাত্মক রাশির যুগ্মতম মূল অবাস্তব হইবে।

(A) রাশিমালাকে পূর্ণবর্গরূপে সাজাইয়া বর্গমূল নির্ণয়।

আমরা সূত্র সাহায্যে বা গুণ করিয়া দ্বিপদ, ত্রিপদ, প্রভৃতি রাশির বর্গ স্থির করিতে পারি। এইরূপ কোন বর্গরাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে একটু মনোযোগ সহকারে পর্যবেক্ষণ করিয়া আমরা ইহাকে সাজাইয়া সূত্রানুযায়ী বর্গাকারে প্রকাশ করিয়া বর্গমূল নির্ণয় করিতে পারি। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল।

Ex. 1. *Find the square root of :*

(*i*) $9a^2 - 30ab + 25b^2$.

(*ii*) $\dfrac{36a^2}{25b^2} + \dfrac{48a}{5b} + 16$.

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $= (3a)^2 - 2.3a.5b + (5b)^2 = (3a - 5b)^2$.

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(3a - 5b)$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা $= \left(\dfrac{6a}{5b}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{6a}{5b}\cdot 4 + 4^2$

$$= \left(\frac{6a}{5b} + 4\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm\left(\dfrac{6a}{5b} + 4\right)$.

Ex. 2. *Find the square root of*

$x^4 - 2x^3 + \frac{1}{16} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. [*S. F. Additional, 1956*]

সূত্র অনুসারে আমরা জানি যে দ্বিপদরাশির বর্গের তিনটি পদ এবং ত্রিপদরাশির বর্গ ছয়টি-পদবিশিষ্ট। এখানে প্রদত্ত রাশিমালা পাঁচটি-পদবিশিষ্ট হওয়ায়, যদি ইহা পূর্ণবর্গ হয়, তবে সম্ভবতঃ ইহা ত্রিপদরাশির বর্গ, এবং ছয়টি পদের দুইটি সরলীকৃত হইয়া একটিতে পরিণত হইয়াছে। এই দৃষ্টিতে দেখিলে, প্রদত্ত রাশিমালাকে x-এর ক্রমনিম্ন ঘাতে সাজাইয়া পাই

$$x^4 - 2x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{16}. \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইহার প্রথম পদ x^2-এর বর্গ, এবং শেষ পদ $\pm\frac{1}{4}$-এর বর্গ। অতএব, প্রদত্ত রাশিমালার বর্গমূল সম্ভবতঃ $x^2 + kx \pm \frac{1}{4}$ আকারের হইবে, যেখানে অজ্ঞাত রাশি k আমাদের বাহির করিতে হইবে যাহাতে $(x^2 + kx \pm \frac{1}{4})^2$ প্রদত্ত রাশিমালার সহিত মিলিয়া যায়। এই ত্রিপদরাশির বর্গের দ্বিতীয় পদ (x^3-বিশিষ্ট)

রাশিমালার দ্বিতীয় পদের সহিত তুলনা করিয়া $k=-1$ পাই, এবং x-এর সহগ তুলনা করিয়া মূলের শেষ পদে '+' চিহ্ন পাই। অতএব, সম্ভবতঃ নির্ণেয় বর্গমূলটি $x^2-x+\frac{1}{4}$ হইবে, উপরোক্তরূপ বিশ্লেষণ করিয়া আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই। এখন এই দৃষ্টিভঙ্গীতে (i)-কে আমরা নিম্নরূপে সাজাইয়া পূর্ণবর্গের আকারে পরিণত করিতে পারি।

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(x^4+2.x^2.\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16})-2.(x^2+\tfrac{1}{4}).x+x^2$$
$$=(x^2+\tfrac{1}{4})^2-2(x^2+\tfrac{1}{4}).x+x^2$$
$$=\{(x^2+\tfrac{1}{4})-x\}^2=(x^2-x+\tfrac{1}{4})^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(x^2-x+\frac{1}{4})$.

দ্রষ্টব্য। অনেক ক্ষেত্রেই উপরের ন্যায় পর্যবেক্ষণ করিয়া আগে বিশ্লেষণ করিয়া লইলে প্রদত্ত রাশিমালাকে পূর্ণবর্গের আকারে সাজাইতে সুবিধা হয়।

Ex. 3. *Find the square root of*

$$4x^4+9y^4+13x^2y^2-6xy^3-4x^3y.$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(2x^2)^2+(3y^2)^2+2.2x^2.3y^2-2(2x^2+3y^2).xy+x^2y^2$$
$$=(2x^2+3y^2)^2-2(2x^2+3y^2).xy+x^2y^2$$
$$=(2x^2+3y^2-xy)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^2-xy+3y^2)$.

Ex. 4. *Extract the square root of*

$$x^4+\frac{1}{x^4}-8\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+14.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(x^4+\dfrac{1}{x^4}-2\right)-8\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)+16$

$$=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2-2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)4+4^2$$

$$=\left(x^2-\frac{1}{x^2}-4\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}-4\right)$.

Ex. 5. *Find the square root of*

(i) $a^2+2ab+b^2+\dfrac{2}{a-b}+\dfrac{1}{a^4-2a^2b^2+b^4}$.

(ii) $(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+2(a^4+b^4)$.

(i) প্রদত্ত রাশিমালা $=(a+b)^2+2.(a+b)\cdot\dfrac{1}{(a+b)(a-b)}+\dfrac{1}{(a^2-b^2)^2}$

$$=(a+b)^2+2.(a+b)\cdot\frac{1}{a^2-b^2}+\frac{1}{(a^2-b^2)^2}$$

$$=\left(a+b+\frac{1}{a^2-b^2}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(a+b+\dfrac{1}{a^2-b^2}\right)$.

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+(a^2+b^2)^2$$
$$-(a^2+b^2)^2+2(a^4+b^4)$$
$$=\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}^2+a^4+b^4-2a^2b^2$$
$$=(2ab)^2+a^4+b^4-2a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4$$
$$=(a^2+b^2)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(a^2+b^2)$.

(B) বর্গমূল-নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম।

কোন রাশির বর্গমূল যখন পর্যবেক্ষণ দ্বারা সহজে নির্ণয় করা যায় না, তখন নিম্নে বর্ণিত সাধারণ নিয়মানুসারে প্রার্থিত বর্গমূল নির্ণয় করা যায়। সকল বীজগণিতীয় রাশিমালার বর্গমূল-নির্ণয়ের ক্ষেত্রেই সাধারণতঃ এই নিয়ম প্রযোজ্য। কিন্তু বর্গমূল-নির্ণয়ের ব্যাপারে সর্বদা এই নিয়ম প্রয়োগ না করিয়া যতদূর সম্ভব পর্যবেক্ষণ দ্বারা পূর্বোক্ত উপায়ে বর্গমূল-নির্ণয় সমধিক প্রশস্ত।

এই সাধারণ নিয়ম পাটীগণিতের বর্গমূল-নির্ণয়ের নিয়মের অনুরূপ। নিয়মটি বর্ণনা করিবার পূর্বে ইহার বিশ্লেষণের জন্য আমরা x-সংবলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশি ax^2+bx+c-এর বর্গ নির্ণয় করিয়া তাহা হইতে কি প্রকারে উহার বর্গ মূল ax^2+bx+c পাওয়া যায়, তৎসম্বন্ধে প্রথমে আলোচনা করিব। সাধারণ নিয়মানুসারে রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে প্রত্যেকস্থলেই রাশিটিকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম অথবা ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইতে হয়।

ax^2+bx+c-এর বর্গ আমরা নিম্নলিখিতরূপে তিনটি অংশে বিভক্ত করিয়া লিখি

$$(ax^2+bx+c)^2 = a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bcx$$
$$=(ax^2)^2+(2ax^2+bx).bx+(2ax^2+2bx+c)c \quad .... \quad (1)$$

যেহেতু (1), ax^2+bx+c-এর বর্গ, সুতরাং ax^2+bx+c (1)-এর বর্গমূল। তিনটি অংশে ভাগ করিয়া (1)-কে যেরূপভাবে লেখা হইয়াছে, তাহা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে মূলের (অর্থাৎ বর্গমূলের) প্রথম পদ ax^2, বর্গরাশি (1)-এর প্রথম পদ $(ax^2)^2$-এর বর্গমূল। বর্গরাশি (1) হইতে ax^2-এর বর্গ a^2x^4 বিয়োগ করিলে আমরা প্রথম ভাগশেষ $(2ax^2+bx).bx+(2ax^2+2bx+c)c$ পাই। ইহার প্রথমাংশ $(2ax^2+bx).bx$ পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে, এই অংশ মূলের প্রথম পদ ax^2-এর দ্বিগুণ $2ax^2$, এবং মূলের দ্বিতীয় পদ bx-এর সমষ্টি $2ax^2+bx$ কে মূলের দ্বিতীয় পদ bx দ্বারা গুণ করিয়া প্রাপ্ত গুণফল। সুতরাং এখন যদি মূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ $2ax^2$-এর সহিত মূলের দ্বিতীয় পদ bx যোগ করিয়া $2ax^2+bx$ কে একটি ভাজকরূপে লইয়া প্রাপ্ত ভাজককে মূলের দ্বিতীয় পদ bx দ্বারা গুণ করি, তবে আমরা বর্গরাশি (1)-এর দ্বিতীয় অংশ $(2ax^2+bx)bx$ পাই। এই গুণফল প্রথম ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিলে আমরা দ্বিতীয় ভাগশেষরূপে (1)-এর তৃতীয় অংশ $(2ax^2+2bx+c)c$ পাই। পরীক্ষা করিলে আমরা দেখিতে পাই, এই অংশ মূলের প্রথম ও দ্বিতীয় পদের সমষ্টির দ্বিগুণ $2ax^2+2bx$ এবং মূলের তৃতীয় পদের সমষ্টি $2ax^2+2bx+c$ কে মূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা গুণ করিয়া লব্ধ গুণফল। সুতরাং পূর্বের ন্যায় $2ax^2+2bx+c$ কে ভাজকরূপে ধরিয়া ইহাকে মূলের তৃতীয় পদ c দ্বারা যদি আমরা গুণ করি, তবে আমরা বর্গরাশি (1)-এর তৃতীয় অংশ অর্থাৎ দ্বিতীয় ভাগশেষ পাই। সুতরাং এই গুণফল দ্বিতীয় ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিলে আর কোন ভাগশেষ থাকিবে না এবং আমরা বর্গমূলরূপে ax^2+bx+c পাইব।

ইহা হইতেই আমরা বর্গমূল-নির্ণয়ের নিম্নে বর্ণিত সাধারণ সূত্রে উপনীত হই।

কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে,

(1) প্রথমতঃ, আমরা প্রদত্ত রাশিকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম বা ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাই।

(2) শক্তির ক্রমানুসারে সাজান প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের বর্গমূল প্রার্থিত **বর্গমূলের প্রথম পদ** (first term)। এই পদের বর্গ প্রদত্ত রাশি হইতে

বিয়োগ করিয়া আমরা প্রথম ভাগশেষ পাই। এই ভাগশেষ-নির্ণয়ের ক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশির বাকি সমস্ত পদ নামাইতে হয় না। বীজগণিতের সাধারণ ভাগের মত প্রয়োজনবোধে পদ নামান হয়।

(3) মূলের প্রথম পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাজকের প্রথম পদরূপে উপরিলিখিত প্রথম ভাগশেষের বামদিকে আমরা বসাই। এই পদ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল মূল এবং ভাজকের সহিত যুক্ত করি। ইহা **মূলের দ্বিতীয় পদ** (second term)। ইহা দ্বারা ভাজককে গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া এবং প্রদত্ত রাশির বাকি পদগুলি প্রয়োজনমত নামাইয়া আমরা নূতন ভাগশেষ স্থির করি।

(4) পূর্বের ন্যায় মূলের প্রথম দুই পদকে 2 দ্বারা গুণ করিয়া নূতন ভাগশেষের বামদিকে নূতন ভাজকরূপে স্থাপন করি। ভাজকের এই দুই পদের প্রথমটির দ্বারা উক্ত ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া প্রাপ্ত ভাগফল মূল এবং ভাজকের সহিত যুক্ত করি। ইহাই **মূলের তৃতীয় পদ** (third term)। ভাজক এবং ইহার গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া পরবর্তী ভাগশেষ স্থির করি। কোন ভাগশেষ না থাকিলে প্রাপ্ত মূলই নির্ণেয় বর্গমূল হইবে।

যতক্ষণ পর্যন্ত কোন ভাগশেষ থাকিবে, ততক্ষণ পর্যন্ত এই নিয়ম পুনঃ পুনঃ প্রয়োগ করিতে হইবে।

প্রদত্ত রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইলে, অর্থাৎ ইহার নির্ণেয় বর্গমূল থাকিলে, এই নিয়ম প্রয়োগের শেষ অবস্থায় ভাগশেষ থাকিবে না।

নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Find the square root of the following expressions :*

(i) $4x^6-12x^4+28x^3+9x^2-42x+49$.

(ii) $4(x^{\frac{3}{2}}+4x^{-\frac{3}{2}})-12(x^{\frac{3}{4}}+2x^{-\frac{3}{4}})+25$.

(i)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^6-12x^4+28x^3+9x^2-42x+49\ (\,2x^3-3x+7 \\
 & 4x^6 \\ \hline
4x^3-3x & \quad -12x^4+28x^3+9x^2 \\
 & \quad -12x^4 \qquad\quad +9x^2 \\ \hline
4x^3-6x+7 & \qquad 28x^3-42x+49 \\
 & \qquad 28x^3-42x+49
\end{array}
$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^3-3x+7)$.

নিয়মের ব্যাখ্যা ঃ

এখানে প্রদত্ত রাশিমালা, x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে। ইহার প্রথম পদ ($4x^6$)-এর বর্গমূল ($2x^3$) নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ। ইহা ভাগফলের স্থানে বসাইয়া, এবং ইহার বর্গ ভাজ্যের প্রথম পদ হইতে বিয়োগ করিয়া ভাজ্যের পরবর্তী (প্রয়োজনবোধে) তিনটি পদ প্রথম ভাগশেষের স্থলে নামান হইল।

এক্ষণে মূলের প্রাপ্ত প্রথম পদের দ্বিগুণ করিয়া ($4x^3$) ভাজকের প্রথম পদরূপে বসাইলাম। ইহা দ্বারা প্রথম ভাগশেষের প্রথম পদ ($-12x^4$)-কে ভাগ করিয়া নির্ণেয় মূলের দ্বিতীয় পদ ($-3x$) পাইলাম। ইহা ভাগফলের দ্বিতীয় পদরূপে, এবং ভাজকের দ্বিতীয় পদরূপে বসান হইল। এই ভাগফলের দ্বিতীয় পদ ($-3x$) দ্বারা ভাজকের দুইটি পদ ($4x^3-3x$)-কে গুণ করিয়া প্রথম ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করা হইল, এবং এই দ্বিতীয় ভাগশেষের সহিত ভাজ্যের অবশিষ্ট দুইটি পদ নামান হইল।

এইবার মূলের প্রাপ্ত দুইটি পদ ($2x^3-3x$)-এর দ্বিগুণ করিয়া দ্বিতীয় ভাজকের স্থলে বসান হইল, এবং ইহার প্রথম পদ ($4x^3$) দ্বারা দ্বিতীয় ভাগশেষের প্রথম পদ ($28x^3$)-কে ভাগ করিয়া মূলের তৃতীয় পদ 7 পাওয়া গেল। ইহা ভাগফলের তৃতীয় পদরূপে, এবং দ্বিতীয় ভাজকের শেষ পদরূপে বসান হইল। এখন এই ভাগফলের তৃতীয় পদ দিয়া দ্বিতীয় ভাজকের তিনটি পদকে গুণ করিয়া দ্বিতীয় ভাগশেষের তিন পদ হইতে বিয়োগ করিলে কোন ভাগশেষ রহিল না। কাজেই নির্ণেয় বর্গমূল $2x^3-3x+7$ পাওয়া গেল।

(ii) x-এর শক্তির অধঃক্রমানুযায়ী সাজাইয়া প্রদত্ত রাশিমালা

$$=4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}.$$

$$4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}\,(2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}}$$

$$4x^{\frac{3}{2}}$$

$$4x^{\frac{3}{4}}-3 \quad -12x^{\frac{3}{4}}+25$$

$$-12x^{\frac{3}{4}}+\ 9$$

$$4x^{\frac{3}{4}}-6+4x^{-\frac{3}{4}} \quad 16-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$$

$$16-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$$

নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}})$.

5·3. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Find the square root of the following expressions :*

(i) $a^4b^2(a^2+b^2)+2a^2b(a-b)-2a^5b^3+1.$

(ii) $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}-2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+3\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5.$

(i) $a^4b^2(a^2+b^2)+2a^2b(a-b)-2a^5b^3+1$

$$=a^6b^2+a^4b^4+2a^3b-2a^2b^2-2a^5b^3+1$$
$$=a^6b^2-2a^5b^3+a^4b^4+2(a^3b-a^2b^2)+1$$
$$=a^4b^2(a^2-2ab+b^2)+2a^2b(a-b)+1$$
$$=\{a^2b(a-b)\}^2+2a^2b(a-b)+1$$
$$=\{a^2b(a-b)+1\}^2=(a^3b-a^2b^2+1)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(a^3b-a^2b^2+1).$

(ii) $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{b^4}-2\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)+\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)-4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+5.$

মনে কর, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=x$; $\therefore \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-2=x^2-2.$

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^3-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=x^3-3x,$$

এবং $\frac{a^4}{b^4}+\frac{b^4}{a^4}=\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)^2-2=(x^2-2)^2-2=x^4-4x^2+2.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(x^4-4x^2+2)-2(x^3-3x)+3(x^2-2)-4x+5$$
$$=x^4-2x^3-x^2+2x+1=(x^2-x)^2-2(x^2-x)+1$$
$$=(x^2-x-1)^2=\left\{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1\right\}^2$$
$$=\left\{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\quad\right\}^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left\{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1\right\}.$

Ex. 2. *Find the value of x that will make* $9x^4-30x^3+13x^2+19x+9$, *a perfect square.*

$$
\begin{array}{lll}
 & 9x^4-30x^3+13x^2+19x+9 & (\,3x^2-5x-2 \\
 & 9x^4 & \\
6x^2-5x & -30x^3+13x^2 & \\
 & -30x^3+25x^2 & \\
6x^2-10x-2 & -12x^2+19x+9 & \\
 & -12x^2+20x+4 & \\
 & \qquad\qquad -x+5 &
\end{array}
$$

এক্ষণে ভাগশেষ $-x+5=0$ হইলে অর্থাৎ $x=5$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 3. *Find the relation among a, b and c so that the quadratic expression ax^2+bx+c may be a perfect square.*

প্রদত্ত রাশি $ax^2+bx+c=(x\sqrt{a})^2+2(x\sqrt{a})\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)+c$

$$=(x\sqrt{a})^2+2(x\sqrt{a})\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)+\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+c$$

$$=\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

$\therefore\quad c-\frac{b^2}{4a}=0$, অর্থাৎ $b^2=4ac$ হইলে প্রদত্ত রাশি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 4. *Extract the square root of*

$$2x^2(y+z)^2+2y^2(z+x)^2+2z^2(x+y)^2+4xyz(x+y+z).$$

প্রদত্ত রাশিমালাকে লেখা যায়

$$2x^2(y^2+z^2+2yz)+2y^2(z^2+x^2+2zx)$$
$$+2z^2(x^2+y^2+2xy)+4xyz(x+y+z)$$
$$=4(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+8xyz(x+y+z)$$
$$=4\{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+2xyz(x+y+z)\}$$
$$=4(xy+xz+yz)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm 2(xy+xz+yz)$.

Ex. 5. *Find the numerical value of n that will make* $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-5\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+n$ *a perfect square.*

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2-2\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+n$$
$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{5}{2}\right)^2+n-2-\frac{25}{4}$$
$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-\frac{5}{2}\right)^2+n-8\tfrac{1}{4}$$

সুতরাং বন্ধনীর বহিঃস্থ অংশ $n-8\frac{1}{4}=0$ হইলে, প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

$\therefore$ $n=8\frac{1}{4}$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

Ex. 6. *Find the least number that must be added to* $237\times240\times243\times246$ *to make the sum a perfect square.*

$237=x$ ধরিয়া, $237\times240\times243\times246=x(x+3)(x+6)(x+9)$
$$=(x^2+9x)(x^2+9x+18)=a(a+18),\text{ যখন } a=x^2+9x$$
$$=(a^2+18a+81)-81=(a+9)^2-81.$$

$\therefore$ নির্ণেয় লঘিষ্ঠ সংখ্যা $=81$.

Ex. 7. *Find the square root of*

$$\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{ax^2}{3}+\frac{a^2}{9}-2x^3-\frac{4ax}{3}.$$

প্রদত্ত রাশিমালাকে x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া

$$\frac{x^4}{4}-2x^3+\left(4+\frac{a}{3}\right)x^2-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}\left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}\right.$$

$$\frac{x^4}{4}$$

$$x^2-2x\;\Big|\;-2x^3+\left(4+\frac{a}{3}\right)x^2$$
$$-2x^3+4x^2$$

$$x^2-4x+\frac{a}{3}\;\Big|\;\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}$$
$$\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3}\right).$

Ex. 8. *Find the square root of*

(i) $x^6+\frac{1}{x^6}-4x^4+4\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+2.$ (ii) $x^4+y^4+(x+y)^4.$

(i) x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^6-4x^4+4x^2+2-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^6}$$

$$=(x^3-2x)^2+2.(x^3-2x)\cdot\frac{1}{x^3}+\left(\frac{1}{x^3}\right)^2$$

$$=\left(x^3-2x+\frac{1}{x^3}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\left(x^3-2x+\frac{1}{x^3}\right).$

(ii) প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^4+y^4+x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3)$$

$$=2\{(x^4+y^4+2x^2y^2)+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2\}$$

$$=2\{(x^2+y^2)^2+2xy(x^2+y^2)+x^2y^2\}$$

$$=2(x^2+y^2+xy)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\sqrt{2}(x^2+xy+y^2).$

Ex. 9. *Find the square root of*

$$3(x+1)(3x-1)(3x+7)(3x+11)+256$$

and hence find the square root of

$$299\times303\times307\times311+256.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(3x+3)(3x+7)(3x-1)(3x+11)+256$

$=(9x^2+30x+21)(9x^2+30x-11)+256$

$=(a+21)(a-11)+256,$ যখন $a=9x^2+30x$

$=a^2+10a-231+256=a^2+10a+25$

$=(a+5)^2=(9x^2+30x+5)^2$ [a-এর মান বসাইয়া]।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(9x^2+30x+5).$

একটু পর্যবেক্ষণ করিলে আমরা দেখিতে পাই যে, প্রদত্ত রাশিমালায় x-এর মান 100 বসাইলে, এই রাশিমালা $303 \times 299 \times 307 \times 311 + 256$ তে পরিণত হয়। সুতরাং নির্ণীত বর্গমূল $9x^2 + 30x + 5$ তে x-এর মান 100 বসাইলে আমরা প্রার্থিত বর্গমূল পাইব।

$\therefore$ প্রার্থিত বর্গমূল $= 9.100^2 + 30.100 + 5$
$= 90000 + 3000 + 5 = 93005.$

Ex. 10. *For what value of n will the expression $25x^4 - 30ax^3 + nx^2 - 24a^3x + 16a^4$ be a perfect square?*

প্রথমে আমরা সাধারণ নিয়মানুসারে প্রদত্ত রাশিমালার বর্গমূল নির্ণয় করিব।

$$\begin{array}{r|l}
 & 25x^4 - 30ax^3 + nx^2 - 24a^3x + 16a^4 \;\big(\; 5x^2 - 3ax + 4a^2 \\
 & 25x^4 \\
\hline
10x^2 - 3ax & -30ax^3 + nx^2 \\
 & -30ax^3 + 9a^2x^2 \\
\hline
10x^2 - 6ax + 4a^2 & (n - 9a^2)x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\
 & \qquad 40a^2x^2 - 24a^3x + 16a^4 \\
\hline
 & (n - 49a^2)x^2
\end{array}$$

এক্ষণে, প্রদত্ত রাশিমালাটিকে পূর্ণবর্গ হইতে হইলে $n - 49a^2 = 0$ হইবে।

$\therefore$ $n = 49a^2$ হইলে প্রদত্ত রাশিমালা পূর্ণবর্গ হইবে।

দ্রষ্টব্য। যেহেতু, বর্গমূল নির্ণেয় প্রদত্ত রাশিমালাকে তদন্তর্গত যে-কোন অক্ষরের শক্তির ঊর্ধ্ব বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে প্রদত্ত রাশির প্রথম পদের বর্গমূল নির্ণেয় বর্গমূলের প্রথম পদ এবং প্রদত্ত রাশির শেষ পদের বর্গমূল নির্ণেয় বর্গমূলের শেষ পদ হইবে, সেইজন্য এখানে নির্ণেয় বর্গমূলের শেষ পদ অর্থাৎ তৃতীয় পদ $4a^2$ ধরিয়া ভাজককে গুণ করা হইল।

Ex. 11. *Find the square root of $x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 + y^4 + 4xy^3$ by arranging the expression according to both descending and ascending powers of x, and explain the discrepancy in the roots obtained in the two cases.*

x-এর শক্তির অধঃক্রম এবং ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশিমালাটি সাজাইলে উহা যথাক্রমে $x^4 - 4x^3y + 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ এবং $y^4 + 4xy^3 + 2x^2y^2 - 4x^3y + x^4$ হয়। সাজান রাশিমালাদ্বয়ের বর্গমূল-নির্ণয় নিম্নে প্রদর্শিত হইল।

$$\begin{array}{l|l}
 & x^4-4x^3y+2x^2y^2+4xy^3+y^4\ \big(\ x^2-2xy-y^2 \\
 & x^4 \\ \hline
2x^2-2xy & -4x^3y+2x^2y^2 \\
 & -4x^3y+4x^2y^2 \\ \hline
2x^2-4xy-y^2 & -2x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
 & -2x^2y^2+4xy^3+y^4 \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
 & y^4+4xy^3+2x^2y^2-4x^3y+x^4\ \big(\ y^2+2xy-x^2 \\
 & y^4 \\ \hline
2y^2+2xy & 4xy^3+2x^2y^2 \\
 & 4xy^3+4x^2y^2 \\ \hline
2y^2+4xy-x^2 & -2x^2y^2-4x^3y+x^4 \\
 & -2x^2y^2-4x^3y+x^4 \\ \hline
\end{array}$$

এইরূপে নির্ণীত বর্গমূলদ্বয়ে বৈষম্য পরিলক্ষিত হইলেও প্রকৃতপক্ষে তাহা বৈষম্য নয়। কেননা আমরা জানি, প্রত্যেক রাশির সমমানবিশিষ্ট বর্গমূল দুইটি—একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক। এক্ষেত্রে প্রদত্ত রাশিমালার দুইপ্রকারে প্রাপ্ত বর্গমূলদ্বয় $x^2-2xy-y^2$ এবং $y^2+2xy-x^2$ অর্থাৎ $-(x^2-2xy-y^2)$. সুতরাং, দুই মূলের মধ্যে পার্থক্য শুধু চিহ্নে। প্রকৃতপক্ষে দুইভাবে প্রাপ্ত বর্গমূলের প্রত্যেকটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখিয়া তৎপূর্বে '$\pm$' চিহ্ন বসাইলে (মূলের চিহ্ন সম্বন্ধে § 5·1 দেখ) দুই ক্ষেত্রে বর্গমূলের কোন পার্থক্য থাকিবে না।

Examples V(A)

Find the square root of each of the following expressions :

1. $9x^4+30x^2y^2+25y^4$.
2. $\frac{25}{4}x^2y^2-20x^2yz+16x^2z^2$.
3. $\dfrac{49x^2}{16y^2}+\dfrac{64y^2}{x^2}+28$.
4. $81x^4y^2+\dfrac{49}{x^2y^2}+126x$.
5. $x^{-4}+1-\dfrac{2}{x^2}$.
6. $16x^4-32x^3y+24x^2y^2-8xy^3+y^4$.
7. (i) $\dfrac{x^2}{y^2}-1\dfrac{3}{4}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$. [*1951 Addl.*]

   (ii) $\dfrac{25x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{25x^2}-20\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{5x}+2$.
8. (i) $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$.

   (ii) $a^2(b^2+4c^2)+b^2c(c-2a)+4abc(a-c)$.

9. $\frac{x^4}{64}+\frac{x^3}{8}-x+1.$

10. $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2.$

11. (i) $x^4-2x^3+\frac{1}{16}+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x.$ [*1956 Addl.*]

(ii) $x^4+x^{-4}+4x^{-3}+2+4x+4x^{-2}.$ [*1959 Addl.*]

12. (i) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4\left(a-\frac{1}{a}\right).$ [*1957 Addl.*].

(ii) $\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2-14\left(a-\frac{1}{2a}\right)+47.$ [*1958 Addl.*]

13. (i) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12.$

(ii) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-4.$

(iii) $4x^4+9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)+18.$

14. (i) $4x^3+9x^{-4}+x^2+12x^{-\frac{1}{2}}-4x^{\frac{5}{2}}-6x^{-1}.$

(ii) $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}.$

15. (i) $4x^{-\frac{3}{2}}+9y^{-\frac{2}{3}}+z^{-\frac{1}{2}}+12x^{-\frac{3}{4}}y^{-\frac{1}{3}}+6y^{-\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{3}{4}}z^{-\frac{1}{4}}.$

(ii) $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}.$

16. (i) $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+2x(y+z)(yz-x^2).$

(ii) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4).$

17. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1.$ [*1954 Addl.*]

18. Prove that

(i) $(x-1)(x+7)(x-3)(x+5)+8^2$ is a perfect square.

(ii) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ is a perfect square.

19. (i) Show that $(2x-3)(2x+1)(2x+5)(2x+9)+256$ is a perfect square, and hence find the square root of

$$297 \times 301 \times 305 \times 309 + 256.$$

(ii) What must be subtracted from $(a+4)(a+5)(a+6)(a+7)+11$ to make it a perfect square ?

20. (i) For what value of m is $x^4-6x^3+7x^2+6x+m$ a perfect square ? [*1954 Addl.*]

(ii) Find c so that $\frac{x^2}{y^2}-c+\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}$ may be a perfect square. [*1956 Addl.*]

(iii) What should be added to $4a^4-12a^3-7a^2+23a+14$ in order to make it a perfect square ? [*1953 Addl.*]

21. For what value of n will the following be a perfect square ?

(i) $x^4-2x+\frac{1}{9}+nx^2-6x^3$.

(ii) $\frac{x^4}{4}+4x^2+\frac{2x^2}{3}+\frac{4}{9}-nx^3-\frac{8x}{3}$.

22. Prove that $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ is a perfect square, if $p^2s=r^2$ and $p^3-4pq+8r=0$.

ANSWERS

1. $3x^2+5y^2$. **2.** $\frac{5}{2}xy-4xz$. **3.** $\frac{7x}{4y}+\frac{8y}{x}$.

4. $9x^2y+\frac{7}{xy}$. **5.** $x^{-2}-1$. **6.** $4x^2-4xy+y^2$.

7. (i) $\frac{x}{y}-\frac{1}{2}-\frac{y}{x}$. (ii) $\frac{5x}{y}-2-\frac{y}{5x}$.

8. (i) $a+bx+cx^2$. (ii) $ab+2ac-bc$. **9.** $\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}-1$.

10. x^3-x^2+x+y. **11.** (i) $x^2-x+\frac{1}{2}$. (ii) $x^2+2x^{-1}+x$

12. (i) $a-\frac{1}{a}-2$. (ii) $a-\frac{1}{2a}-$

13. (i) $x^2+\frac{1}{x^2}-2$. (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}-2$. (iii) $2x^2+3x+\frac{3}{x}$.

14. (i) $2x^{\frac{4}{3}}-x+3x^{-2}$. (ii) $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$.

15. (i) $2x^{-\frac{3}{4}}+3y^{-\frac{1}{3}}+z^{-\frac{1}{4}}$. (ii) $x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}}$.

16. (i) $x^2-x(y+z)-yz$. (ii) a^2+b^2.

17. $x^2+7x+11$. 19. (i) 91789. (ii) 10.

20. (i) 1. (ii) $1\frac{3}{4}$. (ii) $a+2$.

21. (i) $9\frac{2}{3}$. (ii) 2.

5·4. ঘনমূল-নির্ণয় (Determination of cube root)।

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ সূত্র হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, কোন দ্বিপদরাশির ঘন চারিটি পদ-বিশিষ্ট রাশিমালা। কাজেই চারিটি পদ-বিশিষ্ট কোন রাশিমালা যদি প্রকৃত ঘনরাশি হয়, তবে তাহার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে ঐ রাশিমালাকে উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম অনুসারে উপরোক্ত সূত্রানুযায়ী সাজাইয়া সহজেই উহার ঘনমূল নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ মনে করি, $27a^6 - 8a^3b^3 - 54a^5b + 36a^4b^2$ রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইবে।

এখানে a-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া,

প্রদত্ত রাশিমালা $= 27a^6 - 54a^5b + 36a^4b^2 - 8a^3b^3$

$$= (3a^2)^3 - 3.(3a^2)^2.2ab + 3.(3a^2).(2ab)^2 - (2ab)^3$$
$$= (3a^2 - 2ab)^3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= 3a^2 - 2ab$.

তিনটি বা উহার অধিক পদ-বিশিষ্ট রাশির ঘনের অনেকগুলি পদসংখ্যা হইবে। সেরূপ কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে নিম্নে বর্ণিত সাধারণ নিয়মের প্রয়োগই সুবিধাজনক। বলা বাহুল্য, চারিপদবিশিষ্ট রাশিমালার ক্ষেত্রেও এই নিয়ম প্রযোজ্য। এমনকি, পাটীগণিতে কোন বৃহৎ সংখ্যার ঘনমূল-নির্ণয়েও এই নিয়ম প্রয়োগ করা যায়।

প্রদত্ত কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয়ের সাধারণ নিয়ম।

প্রদত্ত কোন রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমেই রাশিটি উহার অন্তর্গত কোন অক্ষরের শক্তির অধঃক্রম বা ঊর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাইতে হয়।

এই সাজান রাশির **প্রথম পদের ঘনমূল প্রার্থিত ঘনমূলের প্রথম পদ হইবে।** মূলের এই প্রথম পদের ঘন করিয়া প্রাপ্ত ঘনরাশি প্রদত্ত রাশি হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ স্থির হয়। তারপর **ঘনমূলের প্রথম পদের বর্গের তিনগুণ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিলে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়।** দ্বিতীয় পদ-নির্ণয়ান্তে ভাগশেষকে ভাগ করিবার জন্য প্রথম ভাজক নিম্নলিখিতরূপে স্থির করা হয়। ঘনমূল-নির্ণয়ে প্রত্যেক ক্ষেত্রেই ভাজক নিম্নবর্ণিত উপায়ে প্রাপ্ত তিনটি পদের সমষ্টি ঃ

(1) ভাজক নির্ণয়ের পূর্বপর্যন্ত মূলের লব্ধ পদসমষ্টির বর্গের তিনগুণ ;

(2) পূর্বলব্ধ পদসমষ্টি এবং নূতন পদ (নিম্নে বর্ণিত উপায়ে প্রাপ্ত)-এর গুণফলের তিনগুণ ; এবং

(3) নূতন পদের বর্গ।

এইরূপে তিন পদের সমষ্টিরূপে প্রাপ্ত ভাজককে মূলের নূতন পদ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া পরবর্তী ভাগশেষ স্থির করিতে হয়। মূলের সকল পদ নির্ণীত হইলে আর কোন ভাগশেষ থাকে না।

পূর্বলব্ধ পদসমূহের সমষ্টির বর্গের তিনগুণ করিয়া যে রাশি পাওয়া যায়, তাহার প্রথম পদ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া ভাগলব্ধ রাশি ঘনমূলের পরবর্তী নূতন পদ হইবে।

নিম্নে কয়েকটি দৃষ্টান্ত দেওয়া গেল ঃ

Ex. 1. *Find the cube root of*

$$8x^6y^3-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6.$$

এখানে প্রদত্ত রাশিমালা x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজান আছে।

$$8x^6y^3-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6 \;\big(\; 2x^2y-5y^2$$
$$8x^6y^3$$

$$\begin{array}{rl|l}
3\times(2x^2y)^2 = & 12x^4y^2 & -60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6 \\
3\times(2x^2y)\times(-5y^2) = & -30x^2y^3 & \\
(-5y^2)^2 = & 25y^4 & \\
\hline
 & 12x^4y^2-30x^2y^3+25y^4 & -60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6
\end{array}$$

সাজান রাশির প্রথম পদ $8x^6y^3$-এর ঘনমূল $2x^2y$, সুতরাং ঘনমূলের প্রথম পদ $2x^2y$. প্রথম পদ $2x^2y$-এর ঘন $8x^6y^3$ প্রদত্ত রাশি হইতে বিয়োগ

করিয়া ভাগশেষ $-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6$. ঘনমূলের লব্ধ প্রথম পদ $2x^2y$-এর বর্গের 3 গুণ $=12x^4y^2$. সুতরাং ভাগশেষের প্রথম পদ $-60x^4y^4$-কে এই $12x^4y^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ পাওয়া গেল।

ভাজক-নির্ণয় (Determination of divisor)।

ঘনমূলের লব্ধ প্রথম পদ $2x^2y$-এর বর্গের 3 গুণ $=12x^4y^2$, পূর্বলব্ধ পদ $2x^2y$ এবং নূতন দ্বিতীয় পদ $-5y^2$-এর গুণফলের 3 গুণ $=-30x^2y^3$.

নূতন দ্বিতীয় পদ $-5y^2$-এর বর্গ $=25y^4$.

সুতরাং, ভাজক $=$ এই তিনের সমষ্টি $=12x^4y^2-30x^2y^3+25y^4$.

ইহাকে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ $-5y^2$ দ্বারা গুণ করিলে গুণফল $-60x^4y^4+150x^2y^5-125y^6$ ভাগশেষ হইতে বিয়োগ করিয়া ভাগশেষ 0 হইল।

সুতরাং, নির্ণেয় ঘনমূল $=2x^2y-5y^2$.

Ex. 2. *Find the cube root of*

$$x^6-6x^5y+24x^4y^2-56x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6.$$

পরের পৃষ্ঠায় প্রদত্ত রাশিমালার ঘনমূল নির্ণয়কার্য দেখান হইল। এখানে রাশিমালা x-এর অধঃক্রম অনুযায়ী সাজানই আছে।

পূর্বোল্লিখিত নিয়ম অনুযায়ী মূলের দুইটি পদ x^2-2xy নির্ণয়ের পর, $12x^4y^2-48x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ অবশিষ্ট রহিল। এখন, মূলের লব্ধপদদ্বয়ের বর্গ $(x^2-2xy)^2$-এর তিনগুণ, অর্থাৎ $3x^4-12x^3y+12x^2y^2$ পরবর্তী ভাজকের অংশত্রয়ের প্রথম অংশ হইবে। এই অংশের প্রথম পদ $3x^4$ দ্বারা ভাগশেষের প্রথম পদ $12x^4y^2$ কে ভাগ করিলে মূলের পরবর্তী পদ $4y^2$ পাওয়া গেল। এখন, $4y^2$-এর সাহায্যে পরবর্তী ভাজকের অপর দুই অংশ নির্ণয় করিতে হইবে। মূলের লব্ধপদদ্বয় x^2-2xy এবং মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$-এর গুণফলের 3 গুণ, $12x^2y^2-24xy^3$ ভাজকের দ্বিতীয় অংশ এবং মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ এর বর্গ $16y^4$ ভাজকের তৃতীয় অংশ হইল। এই তিনের সমষ্টি $3x^4-12x^3y+24x^2y^2-24xy^3+16y^4$ পরবর্তী সম্পূর্ণ ভাজক হইল। এই ভাজককে মূলের তৃতীয় পদ $4y^2$ দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল ভাগশেষ $12x^4y^2-48x^3y^3+96x^2y^4-96xy^5+64y^6$ হইতে বিয়োগ করিয়া কোন ভাগশেষ না থাকায় ঘনমূল $x^2-2xy+4y^2$ নির্ণীত হইল।

$$x^6 - 6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6 \left(x^2 - 2xy + 4y^2 \right.$$

$$x^6$$

$$-6x^5y + 24x^4y^2 - 56x^3y^3$$

$$3 \times (x^2)^2 = 3x^4$$

$$3 \times x^2 \times (-2xy) = -6x^3y$$

$$(-2xy)^2 = +4x^2y^2$$

$$3x^4 - 6x^3y + 4x^2y^2$$

$$-6x^5y + 12x^4y^2 - 8x^3y^3$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

$$3 \times (x^2 - 2xy)^2 = 3x^4 - 12x^3y + 12x^2y^2$$

$$3 \times (x^2 - 2xy) \times 4y^2 = +12x^2y^2 - 24xy^3$$

$$(4y^2)^2 = +16y^4$$

$$3x^4 - 12x^3y + 24x^2y^2 - 24xy^3 + 16y^4$$

$$12x^4y^2 - 48x^3y^3 + 96x^2y^4 - 96xy^5 + 64y^6$$

Ex. 3. *Find the cube root of* 13312053.

স্পষ্টতঃই প্রদত্ত সংখ্যা 13000000 এবং 14000000 এর মধ্যে অবস্থিত এবং 13 সংখ্যাটি 2^3 এবং 3^3 এর মধ্যে অবস্থিত হওয়ায় প্রদত্ত সংখ্যা 200^3 এবং 300^3 এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, নির্ণেয় ঘনমূল তিন-অঙ্কবিশিষ্ট, এবং ইহার শতকের ঘরের অঙ্ক 2. নিম্নে পূর্বোল্লিখিত নিয়মানুযায়ী এই ঘনমূল-নির্ণয় প্রণালী দেখান হইল :

	13312053	$200+30+7$
	8000000	
$3(200)^2 = 120000$	5312053	
$3(200)\times 30 = 18000$		
$30^2 = 900$		
138900	4167000	
	1145053	
$3(230)^2 = 158700$		
$3(230)\times 7 = 4830$		
$7^2 = 49$		
163579	1145053	

$\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $= 237$.

এখানে দেখা যাইতেছে যে, প্রথম ভাজকের প্রথম অংশ $3(200)^2$ অর্থাৎ 120000 দিয়া প্রথম ভাগশেষ 5312053-এর প্রথম ছয় অঙ্ককে ভাগ করিতে গিয়া 4 বার যায়, সুতরাং, মূলের দশকের অঙ্ক সম্ভবতঃ 4, অর্থাৎ মূলের দ্বিতীয় পদ সম্ভবতঃ 40. কিন্তু 40 দ্বিতীয় পদ ধরিলে, নিয়মানুসারে প্রথম ভাজকের তিনটি পদের সমষ্টিকে 4 দ্বারা গুণ করিলে গুণফল প্রথম ভাগশেষ অপেক্ষা অধিক হইয়া যায়। কাজেই মূলের দশকের অঙ্ক 3, অর্থাৎ মূলের দ্বিতীয় পদ 30 ধরিয়া অগ্রসর হওয়া গেল।

মূলের এককের অঙ্ক বাহির করিতে, পূর্ববৎ দ্বিতীয় ভাজকের প্রথম পদ $3(230^2)$ বা 158700 দ্বারা দ্বিতীয় ভাগশেষ 1145053 কে ভাগ করিয়া 7 বার গেল। সুতরাং, এককের অঙ্ক সম্ভবতঃ 7, সেই অনুসারে নিয়মানুযায়ী অগ্রসর হইয়া দেখা গেল, কার্যশেষে কোন ভাগশেষ রহিল না। কাজেই নির্ণেয় ঘনমূল 237 পাওয়া গেল।

দ্রষ্টব্য। মূলের এককের অঙ্ক যে 7 হইবে, তাহা অন্যরূপেও নির্ধারণ করা যায়, কারণ 7^3-এর একক-স্থানের সংখ্যা 3, এবং ইহা প্রদত্ত সংখ্যার একক-

স্থানের সংখ্যার সহিত মিলিয়া যাইতেছে। 7 ভিন্ন অন্য কোন অঙ্কের ঘনের একক 3 হয় না। বলা বাহুল্য, প্রদত্ত সংখ্যা প্রকৃত ঘনসংখ্যা হইলে এই নিয়মে মূলের এককের অঙ্ক স্থির করা যায়।

Examples V (B)

Find the cube root of each of the following expressions :—

1. $a^3b^3+3a^2b^2c^2+3abc^4+c^6$.
2. $8x^3+12x^2+6x+1$.
3. $125x^3-225x^2y^2+135xy^4-27y^6$.
4. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.
5. $27x^6-27x^5+171x^4-109x^3+342x^2-108x+216$.
6. $\frac{x^3}{y^3}+\frac{8y^3}{x^3}-\frac{12x^2}{y^2}-\frac{48y^2}{x^2}+\frac{54x}{y}+\frac{108y}{x}-112$.
7. $a^3b(b^2+3bc+3c^2)+b^3c(c^2+3ca+3a^2)$
$+c^3a(a^2+3ab+3b^2)+6a^2b^2c^2$.
8. $8x^6+36x^5-30x^4-225x^3+105x^2+441x-343$.
9. $\frac{8x^5}{y^5}\left(\frac{x}{y}+6\right)+\frac{30x^2}{y^2}\left(2\frac{x^2}{y^2}-3\right)-\frac{4x}{y}\left(\frac{20x^2}{y^2}-27\right)-27$.
10. $a^3x^6+3a^2bx^5+3ax^4(b^2+ca)+bx^3(b^2+6ca)$
$+3cx^2(b^2+ca)+3bc^2x+c^3$.
11. Find the values of a and b so that $27x^6+54x^5+144x^4+19ax^3+12(a+b)x^2+12ax+64$ may be a perfect cube.
12. Find the cube roots of
(i) 21952. (ii) 185193. (iii) 33076161. (iv) 45499293.

ANSWERS

1. $ab+c^2$. 2. $2x+1$. 3. $5x-3y^2$. 4. $1+x+x^2$.
5. $3x^2-x+6$. 6. $\frac{x}{y}-4+\frac{2y}{x}$. 7. $ab+ac+bc$. 8. $2x^2+3x-7$.
9. $\frac{2x^2}{y^2}+\frac{4x}{y}-3$. 10. ax^2+bx+c. 11. $a=8$, $b=8$.
12. (i) 28. (ii) 57. (iii) 321. (iv) 357.

ষষ্ঠ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালাতত্ত্ব

(Theory of Quadratic Equations and Expressions)

6·1. এক অজ্ঞাতরাশিবিশিষ্ট প্রত্যেক দ্বিঘাত সমীকরণ প্রয়োজনীয় সরলকরণান্তে $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ এই আকারে পরিণত করা যায়। সাধারণ আকারের এই সমীকরণের বীজের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ, তথা রাশিমালা-সংক্রান্ত নানাবিধ বিষয় এই অধ্যায়ে পর্যালোচিত হইবে। পূর্বেই প্রদর্শিত হইয়াছে এই সমীকরণের দুইটি বীজ। এখন প্রমাণ করা হইবে

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটিই বীজ থাকিবে।

(A quadratic equation has two and only two roots.)

মনে করি $ax^2+bx+c=0$ এই দ্বিঘাত সমীকরণের α একটি বীজ*।

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\alpha+c=0$$

$$\therefore\quad c=-(a\alpha^2+b\alpha).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad ax^2+bx+c&=ax^2+bx-a\alpha^2-b\alpha\\&=a(x^2-\alpha^2)+b(x-\alpha)\\&=(x-\alpha)\{a(x+\alpha)+b\}.\qquad\cdots\quad\text{(i)}\end{aligned}$$

অতএব দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ হইতে দেখা যায় α একটি বীজ হইলে $x-\alpha$ একটি একঘাতের উৎপাদক হইবে।

এক্ষণে (i) হইতে দেখা যাইতেছে ax^2+bx+c এই রাশিমালাটির দুইটি এবং কেবলমাত্র দুইটিই একঘাতের উৎপাদক $(x-\alpha)$ র ন্যায় (বাস্তব, অবাস্তব, সমান বা অসমান) আছে। ইহা হইতে প্রমাণিত হয় যে দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ র কেবলমাত্র দুইটি বীজই রহিয়াছে যাহা বাস্তব, অবাস্তব, সমান বা অসমান হইতে পারে।

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইয়ের অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

(A quadratic equation cannot have more than two different roots.)

---

* এখানে ধরা হইয়াছে যে প্রত্যেক সমীকরণেরই একটি বীজ আছে।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির, যদি সম্ভব হয়, তিনটি বিভিন্ন বীজ α, β, γ আছে।

যেহেতু α, β, γ সমীকরণটির বীজ, ইহাদের প্রত্যেকটি সমীকরণটিকে সিদ্ধ করিবে। [বিভাজ্যতা-বিষয়ক উপপাদ্য § 1·3 দ্রষ্টব্য]

সুতরাং, $a\alpha^2+b\alpha+c=0.$ ... ... (i)

$a\beta^2+b\beta+c=0.$ ... ... (ii)

$a\gamma^2+b\gamma+c=0.$ ... ... (iii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া আমরা পাই

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0, \text{ বা } (\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$$

$\therefore \quad a(\alpha+\beta)+b=0$ [$\because$ α, β বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\beta\neq 0.$] ... (iv)

অনুরূপভাবে (ii) ও (iii) হইতে আমরা পাই $a(\beta+\gamma)+b=0$ ... (v)

$\therefore$ (iv) হইতে (v) বিয়োগ করিয়া, $a(\alpha-\gamma)=0$ ... (vi)

কিন্তু ইহা অসম্ভব, যেহেতু $a\neq 0$ এবং α, γ বিভিন্ন বলিয়া $\alpha-\gamma\neq 0.$

অতএব, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইয়ের অধিক বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত। যদি ধরা যায় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি x এর তিনটি বিভিন্ন মান α, β, γ দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে উপরের (vi) হইতে দেখ $a=0$, যেহেতু $\alpha-\gamma\neq 0$, এবং (iv) ও (iii) হইতে যথাক্রমে $b=0$ এবং $c=0.$ অতএব, সমীকরণটি $0.x^2+0.x+0=0$-তে পরিণত হয়। এবং x এর যে-কোন মান দ্বারা সিদ্ধ বলিয়া ইহা একটি **অভেদ** (Identity). সুতরাং, ইহা হইতে আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হই।

যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণ অজ্ঞাত রাশির দুইয়ের অধিক মান দ্বারা সিদ্ধ হয় তবে সমীকরণটি একটি অভেদ।

বিপরীতক্রমে, $Ax^2+Bx+C=0$ যদি একটি অভেদ হয় অর্থাৎ x-এর তিনটি বা ততোধিক মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তবে $A=0, B=0, C=0.$

পূর্ববর্তী অধ্যায়গুলিতে বাস্তব, কাল্পনিক, মূলদ, অমূলদ রাশি লইয়া সবিশেষ আলোচনা করা হইয়াছে। দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ-সংক্রান্ত আলোচনায় দেখা যাইবে যে, সাধারণভাবে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ, বাস্তব, অথবা জটিল রাশি হইবে, এমনকি সমীকরণের সহগগুলি মূলদ বাস্তব হইলেও বীজদ্বয় জটিলও

হইতে পারে। পরবর্তী অনুচ্ছেদগুলিতে সেই সম্বন্ধে বিশদভাবে আলোচনা করা হইল।

Ex. *Prove that*

$$\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$$

ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। ইহার উভয় পক্ষে x এর তিনটি বিভিন্ন মান a, b, c, x এর পরিবর্তে বসাইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয় বলিয়া ইহা x এর যে-কোন মানে সিদ্ধ হইবে। সুতরাং, ইহা একটি অভেদ। উপরোক্ত. অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে প্রদত্ত সমীকরণটিকে যদি $Ax^2+Bx+C=0$ লেখা হয়, তবে দেখা যাইবে $A=0$; $B=0$, $C=0$. ছাত্রগণকে ইহার যথার্থ বিচার করিতে বলা হইতেছে।

6·2. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বা ধর্ম (Nature of the roots of a quadratic equation)।

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c বাস্তব এবং মূলদ) এর বীজদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

বীজদ্বয়ের এই আকার হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্থির করা সম্ভব।

(1) b^2-4ac ধনাত্মক হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং অসমান হইবে ; বিশদভাবে

(a) b^2-4ac পূর্ণবর্গ হইলে, বীজ দুইটি মূলদ এবং অসমান হইবে ;

(b) b^2-4ac ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ না হইলে, বীজ দুইটি অমূলদ ও অসমান হইবে।

(2) b^2-4ac শূন্য হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং সমান হইবে ;

এবং (3) b^2-4ac ঋণাত্মক হইলে, বীজ দুইটি অবাস্তব এবং অসমান হইবে।

অর্থাৎ, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটি সমাধান না করিয়া শুধু মাত্র b^2-4ac হইতে আমরা বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করিতে পারি বলিয়া b^2-4ac রাশিমালাকে দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক** (Discriminant) বলা হয়।

Ex. 1. *Show that the equation $3x^2-7x+5=0$ cannot be satisfied by any real values of x.*

প্রদত্ত সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের সহিত তুলনা করিলে $a=3$, $b=-7$ এবং $c=5$.

$\therefore$ নিরূপক b^2-4ac এক্ষেত্রে $=(-7)^2-4.3.5=49-60=-11.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব।

$\therefore$ এই সমীকরণের কোন বাস্তব বীজ নাই।

Ex. 2. *Prove that the equation* $5px^2+(4p+5q)x+4q=0$ *has rational roots.*

প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ হইবে যদি ইহার নিরূপক পূর্ণবর্গ হয়। এখন, এই সমীকরণের নিরূপক $=(4p+5q)^2-4.5p.4q$

$$=16p^2+40pq+25q^2-80pq$$
$$=16p^2-40pq+25q^2$$
$$=(4p-5q)^2.$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় মূলদ।

Ex. 3. *For what values of k will the equation* $2a^2x^2-5kx+8=0$ *have equal roots ?*

প্রদত্ত সমীকরণের নিরূপক 0 হইলে বীজদ্বয় সমান হইবে। এই সমীকরণের নিরূপক $25k^2-4.2a^2.8=25k^2-64a^2.$

$\therefore$ $25k^2-64a^2=0$ অর্থাৎ $k=\pm\frac{8}{5}a$ হইলে প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হইবে।

6·3. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সহিত সহগগুলির সম্বন্ধ (Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)।

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় যদি α, β হয়, তবে সমাধান করিয়া

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

এবং $$\alpha.\beta=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

আবার, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটিকে $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ আকারে লিখিলে,

উপরের (i) ও (ii) লব্ধ ফল হইতে আমরা লিখিতে পারি, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের x^2 এর সহগ একক হইলে ইহার

(a) বীজদ্বয়ের সমষ্টি, সমীকরণের x এর সহগের সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে ;

(b) বীজদ্বয়ের গুণফল, সমীকরণের x-নিরপেক্ষ পদের (absolute term) সমান হইবে।

উপর হইতে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, যদি কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল যথাক্রমে p এবং q হয়, তবে উপরোক্ত প্রতিজ্ঞা অনুসারে সমীকরণটি $x^2-px+q=0$ হইবে।

6·3A. দ্বিঘাত সমীকরণের প্রদত্ত বীজদ্বয় হইতে সমীকরণটি গঠন।

(Formation of a quadratic equation whose roots are given.)

মনে কর, α, β নির্ণেয় সমীকরণের প্রদত্ত বীজ এবং নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2+px+q=0$.

$\therefore$ $\alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ [p, q মান বসাইয়া]

বা $(x-\alpha)(x-\beta)=0$.

$\therefore$ যে-কোন দ্বিঘাত সমীকরণ নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে

x^2-(বীজদ্বয়ের সমষ্টি) $\times x+$ বীজদ্বয়ের গুণফল $=0$.

সুতরাং, কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটি দেওয়া থাকিলে আমরা সহজেই সমীকরণটি নির্ণয় করিতে পারি।

Ex. 1. *Find the conditions that the roots of* $ax^2+bx+c=0$ *may be (i) both positive, (ii) both negative (iii) one positive and the other negative.*

(i) যদি α, β সমীকরণটির দুইটী বীজ হয় এবং দুইটিই ধনাত্মক হয় তবে $\alpha+\beta$ এবং $\alpha\beta$ উভয়েই ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $-\frac{b}{a}$ এবং $\frac{c}{a}$ উভয়েই ধনাত্মক

হইবে। অতএব নির্ণীত শর্ত এই যে a এবং c একই চিহ্ন যুক্ত হইবে এবং b উহাদের বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হইবে।

(ii) যদি α, β বীজ দুইটী উভয়েই ঋণাত্মক হয় তাহা হইলে $\alpha+\beta$ ঋণাত্মক এবং $\alpha\beta$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ, $-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক ও $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক হইবে। অতএব নির্ণীত শর্ত এই যে a, b, c সবগুলি একই চিহ্ন যুক্ত হইবে।

(iii) α, β বীজ দুইটীর যদি একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয় তবে $\alpha\beta$ ঋণাত্মক হইবেই। $\therefore$ $\frac{c}{a}$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ c এবং a বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হইবে।

এক্ষণে বীজ দুইটির যোগফল অর্থাৎ $\frac{b}{a}$ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অনুসারে, সংখ্যাগরিষ্ঠ বীজটি ঋণাত্মক বা ধনাত্মক হইবে।

অতএব সংখ্যাগরিষ্ঠ বীজটি ধনাত্মক হইবে, যদি b এবং c একই চিহ্ন যুক্ত হয় এবং a বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় এবং ঋণাত্মক হইবে যদি a এবং b একই চিহ্ন যুক্ত হয় এবং c বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয়।

Ex. 2. *Find the condition that the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ should be (i) equal in magnitude and opposite in sign, (ii) reciprocals.*

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি α, β.

(i) বীজ দুইটি সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে $\alpha+\beta=0$,

$\therefore\ -\frac{b}{a}=0$, বা, $b=0$.

$\therefore$ বীজ দুইটি সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে $b=0$ হইবে।

(ii) আবার, বীজ দুইটির একটি অপরটির অন্যোন্যক হইলে, উহাদের গুণফল 1 হইবে অর্থাৎ $\alpha\beta=1$ হইবে।

অতএব, $\frac{c}{a}=1$, বা, $c=a$.

$\therefore$ বীজ দুইটি পরস্পর অন্যোন্যক হইলে $a=c$ হইবে।

6·4. দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c র গুণনীয়ক নির্ণয় (To determine the factors of the quadratic expression ax^2+bx+c)।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি যথাক্রমে α ও β.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\text{এখন } ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

দ্রষ্টব্য। ছাত্রগণকে দ্বিঘাত সমীকরণ ও দ্বিঘাত রাশিমালার মধ্যে পার্থক্যটুকু অনুধাবন করিতে বলা হইতেছে। স্পষ্টতঃই দ্বিঘাত সমীকরণে x এর মাত্র দুইটি মান সম্ভব, কিন্তু দ্বিঘাত রাশিমালায় x এর যে-কোন মান লওয়া সম্ভব।

অনুসিদ্ধান্ত। § 6·2-তে (একাদশ শ্রেণী) নিরূপকের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করা হইয়াছে। দ্বিঘাত রাশিমালার গুণনীয়কগুলির প্রকৃতিও সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতির উপর নির্ভর করিবে। যেমন, গুণনীয়কগুলি (*a*) মূলদ হইবে যদি b^2-4ac ধনাত্মক পূর্ণবর্গ হয়, এবং a, b, c মূলদ হয়; (*b*) বাস্তব ও অমূলদ হইবে যদি b^2-4ac ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ না হয়; (*c*) জটিল হইবে যদি b^2-4ac ঋণাত্মক হয়; (*d*) বাস্তব এবং সমান হইবে যদি $b^2-4ac=0$ হয়; অর্থাৎ সেই ক্ষেত্রে ax^2+bx+c রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ হইবে।

6·5. দ্বিঘাত সমীকরণের সহগ সাহায্যে উহার বীজদ্বয়-সম্বলিত প্রতিসম রাশিমালার মান নির্ণয় (To find the value of a symmetric function of the roots of a quadratic equation in terms of the coefficients)।

দুই রাশি-সম্বলিত কোন রাশিমালাতে রাশিদ্বয়ের একের পরিবর্তে অপরটি লিখিলে যদি রাশিমালার আকার অপরিবর্তিত থাকে তবে রাশিমালাটিকে ঐ দুই রাশির প্রতিসম (symmetrical) রাশিমালা বলা হয়। যথা, $\alpha^3+\beta^3$, $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\dfrac{1}{a\alpha+b}+\dfrac{1}{a\beta+b}$ প্রভৃতি রাশিমালা α, β রাশিদ্বয়ের প্রতিসম রাশিমালা।

6·3 (একাদশ শ্রেণী) অনুচ্ছেদ অনুসারে কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল উক্ত সমীকরণের সহগ সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এখানে বীজদ্বয়-সম্বলিত কয়েকটি প্রতিসম রাশিমালার মান সমীকরণের সহগ সাহায্যে নির্ণয় পদ্ধতি প্রদর্শিত হইল।

Ex. 1. *If* α, β *be the roots of* $ax^2+bx+c=0$, *find the value of*

(i) $\alpha^2+\beta^2$, (ii) $\alpha^3+\beta^3$, (iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ *and*

(iv) $\frac{1}{(a\alpha+b)^2}+\frac{1}{(a\beta+b)^2}$.

যেহেতু, α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ,

$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

সুতরাং, (i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{b^2}{a^2}-2\cdot\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

(ii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{b^3}{a^3}-3\cdot\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$

$$=\frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

(iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}{(\alpha\beta)^2}$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-4\frac{c}{a}\right)}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}.$$

(iv) $\because$ α, β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ,

$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0$, বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$,

বা, $a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$.

অনুরূপভাবে, $a\beta+b=-\frac{c}{\beta}$.

$$\therefore \quad \frac{1}{(a\alpha+b)^2}+\frac{1}{(a\beta+b)^2}=\frac{1}{\frac{c^2}{\alpha^2}}+\frac{1}{\frac{c^2}{\beta^2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{c^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{c^2}$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2c^2}.$$

6·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If α, β be the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$.*

যেহেতু, $x^2+px+q=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি α, β,

$\therefore\ \alpha+\beta=-p$ এবং $\alpha\beta=q$.

এক্ষণে, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{p^2-2q}{q}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি

$$x^2-\frac{p^2-2q}{q}\cdot x+1=0,$$

বা, $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.

Ex. 2. *Find the equation whose roots are $\frac{p+q}{p-q}$ and $-\frac{p-q}{p+q}$.*

নির্ণেয় সমীকরণের বীজ-সমষ্টি $=\frac{p+q}{p-q}-\frac{p-q}{p+q}=\frac{4pq}{p^2-q^2}$,

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2-\frac{4pq}{p^2-q^2}x-1=0$,

বা, $(p^2-q^2)x^2-4pqx+q^2-p^2=0$.

Ex. 3. *If α, β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find the value of (i) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$ and (ii) $(m\alpha-n\beta)(n\alpha-m\beta)$.*

যেহেতু, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি α, β,

$\therefore\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

সুতরাং, (i) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}$

$$=\frac{-\frac{b^3}{a^3}-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c^3}{a^3}}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$$

এবং (ii) $(m\alpha-n\beta)(n\alpha-m\beta)=mn\alpha^2+mn\beta^2-m^2\alpha\beta-n^2\alpha\beta$

$$=mn(\alpha^2+\beta^2)-(m^2+n^2)\alpha\beta=mn\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)-\left(m^2+n^2\right)\cdot\frac{c}{a}$$

$$=\frac{mn}{a^2}\left(b^2-2ac\right)-\frac{c}{a}\left(m^2+n^2\right)=\frac{mnb^2-ac(m+n)^2}{a^2}.$$

Ex. 4. *The roots of the equation $px^2+qx+r=0$ are in the ratio of $m:n$; prove that $q^2=pr(m+n)(m^{-1}+n^{-1})$.*

মনে কর, $px^2+qx+r=0$ সমীকরণটির বীজ α, β এবং $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{m}{n}$.

$\therefore\quad n\alpha=m\beta$, বা, $\alpha=\frac{m}{n}\beta$.

এক্ষণে, $\alpha+\beta=-\frac{q}{p}$, বা, $\frac{m}{n}\beta+\beta=-\frac{q}{p}$, বা, $\beta\frac{m+n}{n}=-\frac{q}{p}$

$\therefore\quad \beta=-\frac{qn}{p(m+n)}$. .... (1)

এবং $\alpha\beta=\frac{r}{p}$, বা, $\frac{m}{n}\beta^2=\frac{r}{p}$, বা, $\beta^2=\frac{rn}{pm}$. .... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $\frac{q^2n^2}{p^2(m+n)^2}=\frac{rn}{pm}$,

বা, $q^2=\frac{pr(m+n)^2}{mn}=pr\,(m+n)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$.

***Ex. 5.** *Find the value of the expression $4x^3+12x^2-27x+15$ when $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$ and show that it will remain unaltered if $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ be substituted for x.*

প্রথমে যে সমীকরণের বীজ দুইটি $\frac{2\pm3\sqrt{-1}}{2}$ তাহা নির্ণয় কর।

বীজ-সমষ্টি $=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}+\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}=2$,

এবং বীজ দুইটির গুণফল $\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}=\frac{2^2+3^2}{4}=\frac{13}{4}$.

$\therefore$ সমীকরণটি $x^2-2x+\frac{13}{4}=0$, বা, $4x^2-8x+13=0$.

$\therefore$ $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$ অথবা $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ হইলে, $4x^2-8x+13=0$.

এখন, $4x^3+12x^2-27x+15$

$$=x(4x^2-8x+13)+5(4x^2-8x+13)-50$$
$$=x\times 0+5\times 0-50=-50.$$

$\therefore$ $x=\frac{2+3\sqrt{-1}}{2}$, বা, $\frac{2-3\sqrt{-1}}{2}$ হইলে উভয় ক্ষেত্রেই প্রদত্ত রাশি-মালার সাংখ্যমান -50.

Ex. 6. *Show that no other real values of x and y than 4 can satisfy the equation $x^2-xy+y^2-4x-4y+16=0$.*

প্রদত্ত সমীকরণটিকে আমরা নিম্নের মত x এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখিতে পারি।

$$x^2-x(y+4)+(y^2-4y+16)=0.$$

এই সমীকরণে x বাস্তব হইলে $\{-(y+4)\}^2-4(y^2-4y+16)\geqslant 0$,

বা, $-3(y^2-8y+16)\geqslant 0$, বা, $-3(y-4)^2\geqslant 0$.

কিন্তু $(y-4)^2$ সতত ধনাত্মক, $\therefore$ $-3(y-4)^2=0$ ব্যতীত অন্য কোনও ধনাত্মক সংখ্যা হইতে পারে না। $\therefore$ $y=4$.

অনুরূপভাবে, প্রদত্ত সমীকরণটিকে y-এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে লিখিয়া y বাস্তব হইবার শর্ত হইতে পাই $-3(x-4)^2\geqslant 0$.

অনুরূপভাবে, $x=4$.

Ex. 7. *If one root of the equation $x^2-px+q=0$ be double of the other, show that $2p^2=9q$.*

মনে কর, $x^2-px+q=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α, β এবং $\alpha=2\beta$.

$\therefore$ $\alpha+\beta=p$, বা, $2\beta+\beta=p$, বা, $3\beta=p$, বা, $\beta=\frac{p}{3}$ .... (1)

এবং $\alpha\beta=q$, বা, $2\beta^2=q$, বা, $\beta^2=\frac{q}{2}$. .... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $\left(\frac{p}{3}\right)^2=\frac{q}{2}$, বা, $\frac{p^2}{9}=\frac{q}{2}$.

$$\therefore\ 2p^2=9q.$$

Ex. 8. *If r be the ratio of the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that* $\frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}$.

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ α, β এবং $\alpha:\beta=r:1$ অর্থাৎ $\alpha=r\beta$.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \text{ বা, } r\beta+\beta=-\frac{b}{a}, \text{ বা, } \beta(r+1)=-\frac{b}{a}.$$

$$\therefore \quad \beta=-\frac{b}{a(r+1)} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}, \text{ বা, } r\beta^2=\frac{c}{a}, \text{ বা, } \beta^2=\frac{c}{ar}.$$

$$\frac{c}{ar}=\beta^2=\frac{b^2}{a^2(r+1)^2}, \text{ বা, } \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{ac}.$$

Ex. 9. *If α, β are the roots of $x^2+px+1=0$ and γ, δ are the roots of $x^2+qx+1=0$, show that*

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

যেহেতু, α, β এবং γ, δ যথাক্রমে $x^2+px+1=0$ এবং $x^2+qx+1=0$ সমীকরণ দুইটির বীজ, $\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=1$ এবং $\gamma+\delta=-q$, $\gamma\delta=1$.

এক্ষণে, $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$

$=\{\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2\}\{\alpha\beta+\delta(\alpha+\beta)+\delta^2\}$

$=(1+p\gamma+\gamma^2)(1-p\delta+\delta^2)$ $\quad [\because \alpha+\beta=-p]$

$=1+p(\gamma-\delta)+(\gamma^2+\delta^2)-p^2\gamma\delta-p\gamma\delta(\gamma-\delta)+\gamma^2\delta^2$

$[\because (\gamma^2+\delta^2)=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$ এবং $\gamma\delta=1]$

$=1+p(\gamma-\delta)+q^2-2-p^2-p(\gamma-\delta)+1$

$=q^2-p^2$.

Ex. 10. *If one of the roots of $x^2+px+q=0$ is the square of the other, show that $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.*

মনে কর, β^2, β প্রদত্ত সমীকরণ $x^2+px+q=0$-এর বীজ।

$$\beta^2+\beta=-p \quad \cdots\cdot \quad \text{(i) এবং } \beta^3=q \quad \cdots\cdot \quad \text{(ii)}$$

(ii) হইতে, $\beta=q^{\frac{1}{3}}$; β এর এই মান (i)-এ বসাইয়া, $q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}}=-p$. উভয় পক্ষের ঘন করিয়া

$$q^2+q+3q^{\frac{2}{3}}.q^{\frac{1}{3}}(q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}})=-p^3,$$

বা, $\quad p^3+q^2-3qp+q=0, \qquad [\because q^{\frac{2}{3}}+q^{\frac{1}{3}}=-p]$

বা, $\quad p^3-q(3p-1)+q^2=0.$

Ex. 11. *If α is not equal to β, but $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ and $\beta^2 = 5\beta - 3$, find the equation whose roots are $\frac{\alpha}{\beta}$ and $\frac{\beta}{\alpha}$.*

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\alpha^2 - 5\alpha + 3 = 0, \quad \cdots \quad \text{(i)}$$
$$\beta^2 - 5\beta + 3 = 0. \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

যেহেতু $\alpha \neq \beta$, (i) এবং (ii) হইতে স্পষ্টতই, α, β

$$x^2 - 5x + 3 = 0, \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

সমীকরণটির দুইটি বীজ।

$$\therefore \quad \alpha + \beta = 5, \text{ এবং } \alpha\beta = 3 \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

এক্ষণে যদি $\alpha' = \frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\beta' = \frac{\beta}{\alpha}$ হয়,

তবে, $\alpha' + \beta' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{5^2 - 2.3}{3} = \frac{19}{3};$$

এবং $\alpha'\beta' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1.$

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - (\alpha' + \beta')x + \alpha'\beta' = 0,$

বা, $x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0$, বা, $3x^2 - 19x + 3 = 0.$

Ex. 12. *If the two roots of $ax^2 + cx + c = 0$ be in the ratio $p : q$, prove that $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = 0.$*

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণ $ax^2 + cx + c = 0$-এর দুইটি বীজ α, β.

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}, \; \alpha + \beta = -\frac{c}{a} \text{ এবং } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore \alpha + \beta + \alpha\beta = -\frac{c}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

এক্ষণে, $\sqrt{\frac{p}{q}} + \sqrt{\frac{q}{p}} + \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\alpha\beta}$

$$= \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = 0.$$

Examples VI(A)

1. Find the nature of the roots of the following equations without solving them :

(i) $x^2+2x=899$. (ii) $6x^2=x+15$.

(iii) $29x^2=842x-29$. (iv) $(x+3)^2=6x+19$.

*(v) $x^2+2x+2=0$. (vi) $99x^2+100x=101$.

2. (i) Prove that the equation

$$(a+b+c)x^2-2(b+c)x-(a-b-c)=0$$

has always rational roots.

(ii) Show that the equation $a^2x^2+3(ax+1)+4b^2=0$ cannot be satisfied by any real value of x.

3. If a, b, c are rational quantities whose sum is zero, prove that the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ will always be rational.

4. (i) Find for what value of k the equation $3x^2-2(1-3k)x+3k^2=0$ will have equal roots.

(ii) Show that the roots of the equation $(b^2+d^2)x^2+2(ab+cd)x+(a^2+c^2)=0$ are equal, if a, b, c, d be in proportion.

(iii) Show that the roots of the equation

$(a^2-bc)x^2+2(b^2-ca)x+(c^2-ab)=0$ will be equal, if $b=0$, or $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

(iv) For what value of m will the equation

$$\frac{a}{x+a+m}+\frac{b}{x+b+m}=1$$

have two roots equal in magnitude and opposite in sign ?

5. Prove that each of the following two equations has rational roots (i) $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ and (ii) $3(a+b)x^2-(5b+a)x-2(a-b)=0$.

6. Without solving the equation $3x^2-4x-1=0$ find the sum, the difference of the roots of the equation and the sum and the difference of the squares of the roots of the equation.

7. Are the following identities ?

(i) $(x^2-a)(b-a)+(x^2-b)(a-b)=(a-b)^2$.

(ii) $(x-m)^2+(x-n)^2=x(x-m)+x(x-n)+m(m-x)+n(n-x)$.

(iii) $(y+z-2x)(z+x-2y)+(z+x-2y)(x+y-2z)+(x+y-2z)(y+z-2x)$
$=3\{(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)(y-z)\}$.

(iv) $2x(y+z-x)+(z+x-y)(x+y-z)$
$=2y(z+x-y)+(x+y-z)(y+z-x)$
$=2z(x+y-z)+(y+z-x)(z+x-y)$
$=(y+z-x)(z+x-y)+(z+x-y)(x+y-z)+(x+y-z)(y+z-x)$.

8. (*a*) If α, β are the roots of $x^2-px+q=0$, find in terms of p, q the values of the following :

(i) $\dfrac{1}{\alpha^3}+\dfrac{1}{\beta^3}$ (ii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$. (iii) $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}$.

(iv) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$. *(v) $(\alpha-p)^{-4}+(\beta-p)^{-4}$.

(*b*) If α, β are the roots of $ax^2+bx+c=0$, find in terms of a, b, c, the values of the following :

(i) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$. (ii) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$. (iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

(iv) $\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)+\beta^2\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}-\alpha\right)$. (v) $\dfrac{1}{(a\alpha+b)^3}+\dfrac{1}{(a\beta+b)^3}$.

9. If the roots of the equation $x^2-px+q^2=0$ be real, prove that p cannot lie between $-2q$ and $2q$.

10. If the roots of $x^2+2rx+pq=0$ be real and unequal, prove that those of $x^2-2(p+q)x+(p^2+q^2+2r^2)=0$ are imaginary and vice versa.

11. Show that the values of x obtained from the equations $ax^2+by^2=1$ and $ax+by=1$ will be equal if $a+b=1$.

12. The sum of the roots of a quadratic equation is 2 and the sum of their cubes is 27; find the equation.

13. For what value of m will the roots of the equation $2x^2-14x+m=0$ bear to each other the ratio 3 : 4 ?

14. If α, β are the roots of $x^2+ax+b=0$ and α^2, β^2 are the roots of $x^2+Ax+B=0$, prove that $A=2b-a^2$, $B=b^2$.

15. If α, β are the roots of the equation $x^2-px+q=0$, find the equation whose roots are

(i) $\alpha+1, \beta+1$; (ii) $\alpha-2, \beta-2$; (iii) $3\alpha, 3\beta$;

(iv) $\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}$; (v) $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$; (vi) $\frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2}$;

(vii) $\alpha+2\beta, \beta+2\alpha$; (viii) $\alpha^2+\beta, \beta^2+\alpha$;

(ix) $\frac{\alpha}{2}-2\beta, \frac{\beta}{2}-2\alpha$.

16. If α, β are the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find the equation whose roots are

(i) $\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha^{-1}$. (ii) $\alpha+\beta^{-1}, \beta+\alpha^{-1}$.

(iii) $\frac{a\alpha+b}{\beta}, \frac{a\beta+b}{\alpha}$. (iv) $\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta$.

17. If α, β are the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the condition that

(i) $\alpha=\beta$. (ii) $\alpha=$ 1 (iii) $\alpha=2\beta$.

(iv) $\alpha-\beta=2$. (v) $\alpha+\beta=7$. (vi) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2$.

18. If α, β are the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the value of $\alpha^2+\beta^2$ without solving this equation, and form the equation whose roots are α^2 and β^2 expressing the coefficients in terms of p and q.

Hence, or otherwise, show that each root of the equation $x^2+x+1=0$ is the square of the other root.

19. (*a*) Express the roots of the equation

$$q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$$

in terms of those of $x^2+px+q=0$.

(*b*) Show that the ratio r of one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ to the other is given by the equation

$$acr^2+(2ac-b^2)r+ac=0.$$

20. Form an equation whose roots are the cubes of the roots of the equation $2x(x-a)=a^2$.

21. Prove that the roots of the equation

$$(a+b)x^2-(a+b+c)x+\frac{c}{2}=0$$

are always real.

22. If one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ be the square of the other, prove that $b^3+a^2c+ac^2=3abc$.

23. If α, β are the roots of $x^2-100x+2491=0$, and α, γ are the roots of $x^2+50x-4559=0$, find without solving these equations the values of $\beta-\gamma$ and β/γ.

24. If α, β be the roots of the equation $3x^2-6x+4=0$, find the value of

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta.$$

25. If α, β and α', β' be the roots of $x^2-px+q=0$ and $x^2-p'x+q'=0$ respectively, find the value of

$$(\alpha-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2.$$

26. If the roots of $x^2-px+q=0$ are two consecutive odd or even integers, show that $p^2=4(q+1)$.

27. Find the value of p and the roots of the equation $2x^2-33x+p=0$, given that one root is ten times the other.

28. Prove that the roots of the equation $x^2-4x+3+a(3x-1)=0$ are real for all values of 'a' except those lying between $\frac{2}{9}$ and 2.

29. Form the equation whose roots will be the A.M. and G.M. of the roots of $x^2-px+q=0$.

30. If α, β are the roots of the equation $ax^2+bx-a=0$, prove that $(a\alpha+b)(a\beta+b)=-a^2$ and find the equation whose roots are $a\alpha+b$, $a\beta+b$.

31. If $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ be the roots of the equation $x^2+px+q=0$, prove that $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ will be the roots of

$$(p^2-4q)(p^2x^2+4px)=16q.$$

32. If $\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$ denote the roots of $x^2-px+q=0$, show that the equation whose roots are $\alpha \pm \beta$ is

$$(4x-p^2)^2=(p^2-4q)^2.$$

33. If α_1, β_1 be the roots of $x^2-px+q=0$ and α_2, β_2 those of $x^2-qx+p=0$, form the equation whose roots are

$$\frac{1}{\alpha_1\beta_2}+\frac{1}{\alpha_2\beta_1} \text{ and } \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\beta_1\beta_2}.$$

34. If the ratio of the roots of $ax^2+bx+c=0$ be equal to that of the roots of $a_1x^2+b_1x+c_1=0$, prove that

$$b^2 : b_1^2 :: ac : a_1c_1.$$

ANSWERS

1. (i) Rational opposite in sign, the numerically greater root being negative.

(ii) " " " " " " " positive.

(iii) " and reciprocal, both roots positive.

(iv) Irrational, but equal and opposite.

*(v) Complex. (vi) Real, irrational and unequal.

4. (i) $k=\frac{1}{6}$; (iv) 0. 6. $\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}\sqrt{7}$, $\frac{22}{9}$, $\frac{8}{9}\sqrt{7}$. 7. yes.

8. (*a*) (i) $\frac{p^3-3pq}{q^3}$. (ii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q}$. (iii) $\frac{p^3-3pq}{p^2-2pq}$.

(iv) $1+p+p^2-q+pq+q^2$. (v) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.

(*b*) (i) $\frac{b^2-2ac}{ac}$. (ii) $\frac{b^2-2ac}{c^2}$. (iii) $\frac{(b^2-ac)(b^2-3ac)}{a^4}$.

(iv) $-\frac{b(b^2-4ac)(b^2-ac)}{a^4c}$. (v) $\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$.

12. $6x^2-12x-19=0$. 13. 24. 15. (i) $x^2-(p+2)x+(p+q+1)=0$.

(ii) $x^2-(p-4)x+(q-2p+1)=0$. (iii) $x^2-3px+9q=0$.

(iv) $16x^2-4px+q=0$. (v) $x^2-\sqrt{p+2\sqrt{q}}x+\sqrt{q}=0$.

(vi) $q^2x^2-(p^3-3pq)x+q=0$. (vii) $x^2-3px+2p^2+q=0$.

(viii) $x^2-(p^2+p-2q)x+(p^3-3pq+q^2+q)=0$.

(ix) $4x^2+6px-4p^2+25q=0$.

16. (i) $ac(x+1)^2=b^2x$. (ii) $acx^2+b(a+c)x+(a+c)^2=0$.

(iii) $(x+a)^2=0$. (iv) $a^2x^2+3abx+2b^2+ca=0$.

17. (i) $p^2=4q$. (ii) $q=1$. (iii) $2p^2=9q$. (iv) $p^2=4(q+1)$.

(v) $p=-7$. (vi) $p+2q=0$. 18. p^2-2q; $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$.

19. (*a*) α^{-2}, β^{-2} α, β being the roots of the latter equation.

20. $8x^2-20a^3x-a^6=0$. 23. 150, $-\frac{53}{97}$. 24. 8.

25. $2(p^2+p'^2-pp'-2q-2q')$. 27. $p=45$, $x=1\frac{1}{2}$ and 15.

29. $x^2-(\frac{1}{2}p+\sqrt{q})x+\frac{1}{2}p\sqrt{q}=0$. 30. $x^2-bx-a^2=0$.

33. $x^2-x+\frac{p^3-4pq+q^3}{p^2q^2}$.

6·7. দুইটি সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$, ও $a'x^2+b'x+c'=0$ র একটি সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত নির্ণয় কর। উক্ত শর্ত পূরণ হইলে সমীকরণ-দ্বয়ের অপর বীজদ্বয়ও নির্ণয় করিতে হইবে।

[Find the condition that the two equations $ax^2+bx+c=0$ and $a'x^2+b'x+c'=0$ may have one root common. Assuming that this condition is satisfied, find the common root and also he other roots of the equations.]

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α.

$$\therefore \quad a\alpha^2 + b\alpha + c = 0,$$
$$a'\alpha^2 + b'\alpha + c' = 0.$$

$$\therefore \quad \text{বজ্রগুণন দ্বারা, } \frac{\alpha^2}{bc' - b'c} = \frac{\alpha}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b} \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\text{বা, } \quad \frac{\alpha^2}{bc' - b'c} \cdot \frac{1}{ab' - a'b} = \frac{\alpha^2}{(ca' - c'a)^2}$$

$$\therefore \quad (bc' - b'c)(ab' - a'b) = (ca' - c'a)^2, \qquad \ldots \quad (2)$$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(1) হইতে, $\alpha = \dfrac{bc' - b'c}{ca' - c'a}$, অথবা, $\dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

$\therefore$ দুইটি সমীকরণের সাধারণ বীজ $\alpha = \dfrac{bc' - b'c}{ca' - c'a}$, অথবা, $\dfrac{ca' - c'a}{ab' - a'b}$.

[এই দুই মান বিভিন্ন নয়, (2) অনুসারে ইহারা পরস্পর সমান]

যেহেতু প্রথম সমীকরণের বীজ দুইটির গুণফল $\dfrac{c}{a}$,

$\therefore$ প্রথম সমীকরণের অপর বীজ $\dfrac{c(ca' - c'a)}{a(bc' - b'c)}$, বা, $\dfrac{c(ab' - a'b)}{a(ca' - c'a)}$.

যেহেতু দ্বিতীয় সমীকরণের বীজ দুইটির গুণফল $\dfrac{c'}{a'}$,

$\therefore$ দ্বিতীয় সমীকরণের অপর বীজ $\dfrac{c'(ca' - c'a)}{a'(bc' - b'c)}$, বা, $\dfrac{c'(ab' - a'b)}{a'(ca' - c'a)}$.

Ex. 1. *Find the condition that the expressions* $ax^2 + 2hxy + by^2$ *and* $a'x^2 + 2h'xy + b'y^2$ *may have a common linear factor.*

মনে কর, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ের সাধারণ গুণনীয়ক $x - ly$ এবং

$$ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv a(x - ly)(x - my) \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\text{ও } a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 \equiv a'(x - ly)(x - ny). \qquad \ldots \quad (2)$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালাদ্বয়ে অর্থাৎ (1) এবং (2)-এ $x=ly$ বসাইলে,

$$a(ly)^2+2h.ly.y+by^2 \equiv a(ly-ly)(ly-my)=0$$

এবং $$a'(ly)^2+2h'.ly.y+b'y^2 \equiv a'(ly-ly)(ly-ny)=0.$$

সরল করিয়া আমরা পাই $al^2+2hl+b=0,$ .... (3)

এবং $a'l^2+2h'l+b'=0.$ .... (4)

(3) এবং (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা

$$\frac{l^2}{2(b'h-bh')}=\frac{l}{a'b-ab'}=\frac{1}{2(ah'-a'h)}.$$

$$\therefore \quad \frac{l^2}{(a'b-ab')^2}=\frac{l^2}{2(b'h-bh')}\cdot\frac{1}{2(ah'-a'h)}.$$

$\therefore \quad (a'b-ab')^2=4(b'h-bh')(ah'-a'h)$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

6·8. অনুবন্ধী-বীজ বা প্রতিযোগী-বীজ (Conjugate roots)

(i) মূলদ সহগবিশিষ্ট কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ রাশি হইলে, অপরটি উহার অনুবন্ধী অমূলদ রাশি হইবে অর্থাৎ একটি বীজ p+ √q হইলে অপর বীজটি ইহার অনুবন্ধী রাশি p− √q হইবে।

মনে কর, অমূলদ রাশি $p+\sqrt{q}$, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ।

তাহা হইলে, $a(p+\sqrt{q})^2+b(p+\sqrt{q})+c=0,$

বা, $ap^2+aq+bp+c+\sqrt{q}(2ap+b)=0.$

যেহেতু আমরা জানি, কোন মূলদ ও অমূলদ অংশ বিশিষ্ট রাশিমালা শূন্য হইলে উহার মূলদ এবং অমূলদ অংশের প্রত্যেকটি পৃথক্‌ভাবে শূন্য হইবে,

$\therefore \quad ap^2+aq+bp+c=0$ এবং $2ap+b=0.$ .... (i)

এক্ষণে, $a(p-\sqrt{q})^2+b(p-\sqrt{q})+c$

$=(ap^2+aq+bp+c)-\sqrt{q}(2ap+b)=0.$ [(i) এর সাহায্যে]

$\therefore \quad ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের $(p-\sqrt{q})$ও একটি বীজ।

(ii) বাস্তব সহগযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ জটিল রাশি হইলে, অপর বীজটি অনুবন্ধী জটিল রাশি হইবে দেখা যাইবে। $p+iq$ একটি বীজ হইলে অপরটি ইহার অনুবন্ধী রাশি $p-iq$ হইবে।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি জটিল বীজ $p+iq$. (p, q বাস্তব)

$$\therefore \quad a(p+iq)^2+b(p+iq)+c=0,$$

$$\text{বা,} \quad ap^2-aq^2+bp+c+iq(2ap+b)=0.$$

বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশের প্রত্যেকটি পৃথক্‌ভাবে শূন্য না হইলে উহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না।

$$\therefore \quad ap^2-aq^2+bp+c=0 \quad \text{এবং} \quad 2ap+b=0.$$

এক্ষণে, $a(p-iq)^2+b(p-iq)+c$

$$=ap^2-aq^2+bp+c-iq(2ap+b)=0-iq0=0.$$

$\therefore \quad ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে $(p-iq)$ও একটি বীজ।

6·9. দ্বিঘাত রাশিমালার মানের চিহ্ন নির্ণয়।

x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান 'a'-এর চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় যদি বাস্তব ও ভিন্ন হয় এবং x-র মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্বর্তী যে-কোন মান হয়, তবে ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান 'a'-এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

[For all real values of x the expression ax^2+bx+c has the same sign as a, except when the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ are real and unequal, and x lies between them.]

I. মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ α, β এবং ধর $\alpha > \beta$.

তাহা হইলে $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

এক্ষণে x, α অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে $(x > \alpha > \beta)$ $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উৎপাদকদ্বয় উভয়েই ধনাত্মক হইবে; আর, x যদি β অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় $(\alpha > \beta > x)$ $x-\alpha$ এবং $x-\beta$ উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইবে। $\therefore$ উভয় ক্ষেত্রেই উহাদের গুণফল অর্থাৎ $(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে। এবং $a(x-\alpha)(x-\beta)$ অর্থাৎ ax^2+bx+c রাশিমালা a-এর চিহ্নবিশিষ্ট হইবে। কিন্তু $\alpha > x > \beta$ হইলে x, α ও β মধ্যবর্তী হইবে, সুতরাং $x-\alpha$ ঋণাত্মক এবং $x-\beta$ ধনাত্মক হইবে এবং ইহাদের গুণফল $(x-\alpha)(x-\beta)$ ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং, $a(x-\alpha)(x-\beta)$ অর্থাৎ ax^2+bx+c রাশিমালা a-এর বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে।

II. যদি $\alpha=\beta$ হয়, তবে $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$.

এক্ষণে, x এর সকল বাস্তব মানের ক্ষেত্রে $(x-\alpha)^2$ পূর্ণবর্গ বলিয়া সতত ধনাত্মক।

$\therefore$ ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট।

*III. মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ দুইটি কাল্পনিক।

এখন, $$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\};$$

কিন্তু বীজ দুইটি কাল্পনিক বলিয়া b^2-4ac ঋণাত্মক অর্থাৎ $4ac-b^2$ ধনাত্মক।

$\therefore$ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ রাশিমালা x এর সকল মানেই ধনাত্মক।

$\therefore$ ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট।

উপরের অনুচ্ছেদ হইতে সহজেই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, b^2-4ac ঋণাত্মক বা শূন্য হইলে x এর যে-কোন বাস্তব মানে ax^2+bx+c এবং a সমচিহ্নবিশিষ্ট হইবে; এবং এই শর্ত সিদ্ধ হইলে ax^2+bx+c রাশিমালাটি এবং a যুগপৎ ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

বিপরীতক্রমে, ax^2+bx+c সতত ধনাত্মক হইতে হইলে, b^2-4ac অবশ্যই ঋণাত্মক অথবা শূন্য হইবে এবং a ধনাত্মক হইবে; এবং ax^2+bx+c রাশিমালাটি সতত ঋণাত্মক হইতে হইলে b^2-4ac ঋণাত্মক অথবা শূন্য হইবে এবং a অবশ্যই ঋণাত্মক হইবে।

6·10. দ্বিঘাত রাশিমালা ax^2+bx+c-এর চরম (maximum) এবং অবম (minimum) মান।

প্রদত্ত রাশিমালা ax^2+bx+c নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}. \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

(i) a ধনাত্মক হইলে x-এর সকল বাস্তব মানে $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ একটি পূর্ণবর্গ বলিয়া, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \not< 0$, কিন্তু ইহা 0 হইতে পারে, তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

$\therefore$ (1) হইতে, ax^2+bx+c এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না, অর্থাৎ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ রাশিই প্রদত্ত রাশিমালার অবম মান এবং তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

(ii) a ঋণাত্মক হইলে, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ধনাত্মক বলিয়া, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \not> 0$, কিন্তু ইহা শূন্য হইতে পারে, তখন $x=-\frac{b}{2a}$.

সুতরাং, (1) হইতে, ax^2+bx+c এর মান কখনও $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারে না, অর্থাৎ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ প্রদত্ত রাশিমালার চরম মান।

দ্রষ্টব্য : a ঋণাত্মক হইলে প্রদত্ত রাশিমালার কোন অবম মান নির্ণয় করা যায় না।

6·11. x ও y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিবার শর্ত নির্ণয়।

[Find the condition that the general expression of second degree in x, y *viz.*, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ may be resolved into two linear factors.]

প্রদত্ত রাশিমালাকে শূন্য ধরিলে ইহাকে x এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করিতে পারা যাইবে। $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$

এই সমীকরণকে x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইলে,

$$ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0.$$

$$\frac{-2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}.$$

$$\therefore\quad ax+hy+g=\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(gh-af)+g^2-ac}.$$

এক্ষণে প্রদত্ত রাশিমালার $lx+my+n$ আকারের দুইটি গুণনীয়ক থাকিলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা অবশ্যই একটি পূর্ণবর্গ হইবে। তাহা হইলে মূলচিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালাকে শূন্য ধরিয়া উহাকে y এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ-রূপে গণ্য করতঃ ইহার নিরূপক শূন্য হইলে এই রাশিমালার পূর্ণবর্গ হইবার শর্ত পাওয়া যাইবে।

$$\therefore\quad (gh-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac),$$

বা, $g^2h^2-2ghaf+a^2f^2=g^2h^2-ach^2-abg^2+a^2bc$

পক্ষান্তর করিয়া a দ্বারা ভাগকরণান্তে

$\mathbf{abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0}$, এবং ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

নির্ণীত এই রাশিমালাকে x, y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ এর নিরূপক বলা হয়।

Ex. *Find the condition that the expressions* $ax^2+2hxy+by^2$ *and* $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ *may be respectively divisible by* $y-mx$ *and* $x+my$.

মনে কর, $\quad ax^2+2hxy+by^2\equiv b(y-mx)(y-nx) \quad \cdots\quad (1)$

এবং $\quad a'x^2+2h'xy+b'y^2\equiv a'(x+my)(x-py) \quad \cdots\quad (2)$

যেহেতু, প্রথম রাশিমালার একটি গুণনীয়ক $y-mx$, সুতরাং, $y=mx$ ধরিলে (1) এর উভয়পক্ষ শূন্য হইবে।

$$\therefore\quad ax^2+2hx.mx+b.m^2x^2=0,$$

বা, $\quad bm^2+2hm+a=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

অনুরূপভাবে, $a'm^2y^2 + 2h'.(-my).y + b'y^2 = 0,$

বা, $a'm^2 - 2h'm + b' = 0.$ ... (4)

$\therefore$ (3) ও (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{m^2}{2(hb'+ah')} = \frac{m}{aa'-bb'} = -\frac{1}{2(bh'+a'h)},$$

$\therefore$ $(aa'-bb')^2 + 4(hb'+ah')(bh'+a'h) = 0$, ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

6.12. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *If the equations* $x^2+bx+ca=0$ *and* $x^2+cx+ab=0$ *have a common root, prove that their other roots will satisfy the equation* $x^2+ax+bc=0$.

মনে কর, $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α,

$\therefore$ $\alpha^2+b\alpha+ca=0$ এবং $\alpha^2+c\alpha+ab=0.$

বজ্রগুণন দ্বারা, $\dfrac{\alpha^2}{b.ab-c.ca} = \dfrac{\alpha}{ca-ab} = \dfrac{1}{c-b},$

বা, $\dfrac{\alpha^2}{a(b^2-c^2)} = \dfrac{\alpha}{a(c-b)} = \dfrac{1}{c-b}$, বা, $\dfrac{\alpha^2}{a(b+c)} = \dfrac{-\alpha}{a} = -1.$

$\therefore$ সাধারণ বীজ $\alpha = a$ অথবা $-(b+c)$.

.. $\dfrac{a^2}{a(b+c)} = -1$ বা, $a = -(b+c)$ অর্থাৎ $a+b+c=0.$

প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ca, $\therefore$ ইহার অপর বীজ c, এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ab, $\therefore$ ইহার অপর বীজ b. এই বীজদ্বয় b, c পর পর তৃতীয় সমীকরণের বামপার্শ্বে বসাইয়া আমরা পাই

$$\left.\begin{array}{l} b^2+ab+bc = b(b+a+c) = 0 \\ \text{এবং} \quad c^2+ac+bc = c(c+a+b) = 0 \end{array}\right\} \because \quad a+b+c=0.$$

অর্থাৎ b, c মান দ্বারা তৃতীয় সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সাধারণ বীজ $-(b+c)$ ধরিয়াও ইহা প্রমাণ করা যায়।

অন্যভাবে, তৃতীয় সমীকরণটির বীজদ্বয় b ও c ; সুতরাং, § 6·3 (একাদশ শ্রেণী) অনুসারে ইহার সমীকরণ $x^2-(b+c)x+bc=0$, কিন্তু যেহেতু $a+b+c=0$, $\therefore$ $x^2+ax+bc=0.$

Ex. 2. *If x is a real quantity, prove that the expression* $\dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-1}$ *can have all numerical values except such as lie between* 2 *and* $-\frac{3}{2}$.

মনে কর, $\dfrac{3x^2+2}{x^2-2x-1}=y.$ $\therefore$ $3x^2+2=yx^2-2xy-y.$

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2(3-y)+2xy+(y+2)=0.$

ইহা x-সম্বলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, x যদি বাস্তব হয়, তবে

$$4y^2-4(3-y)(y+2)>0, \text{ বা, } y^2+y^2-y-6>0$$

বা, $\quad 2y^2-y-6>0$, বা, $(2y+3)(y-2)>0$,

বা, $\quad 2(y+\frac{3}{2})(y-2)>0.$

$\therefore$ এই রাশিমালার উৎপাদকদ্বয় উভয়েই ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হইবে। উভয় উৎপাদক ধনাত্মক হইলে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালা 2 অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। এবং উভয় উৎপাদক ঋণাত্মক হইলে y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালা $-\frac{3}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

সুতরাং প্রদত্ত রাশিমালা 2 এবং $-\frac{3}{2}$ এর মধ্যবর্তী কোন মান ব্যতীত যে-কোন সাংখ্যমান হইতে পারে।

Ex. 3. *Find the limits between which 'a' must lie so that* $\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$ *may have all values, x being any real quantity.*

মনে কর, $\dfrac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y.$

$\therefore \quad x^2(a-5y)-7x(1-y)+(5-ay)=0.$

যেহেতু, x একটি বাস্তব রাশি, $49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\geqslant 0$;

অর্থাৎ, $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)\geqslant 0.$

অর্থাৎ, § 6·9 (একাদশ শ্রেণী) অনুসারে, $49-20a>0$ এবং সঙ্গে সঙ্গে,

$$4(2a^2+1)^2-4(49-20a)^2\leqslant 0,$$

বা, $\quad (2a^2+1)^2-(49-20a)^2\leqslant 0,$

বা, $\quad 2(a^2-10a+25)\times 2(a^2+10a-24)\leqslant 0,$

বা, $\quad 4(a-5)^2(a+12)(a-2)\leqslant 0.$

$\therefore$ a, 2 এবং -12 এর মধ্যবর্তী হইলে $(-12 < a < 2)$, এই রাশি-মালা < 0 হইবে এবং এই দুই মানের জন্য $49-20a > 0$. যখন $a=5$, -12 অথবা 2, তখন এই রাশিমালা $=0$. কিন্তু $a=5$ হইলে $49-20a < 0$ হইবে না। সুতরাং 'a' এর মান -12 এবং 2 এর মধ্যবর্তী যে-কোন রাশি হইতে পারে।

Ex. 4. *If the equations $ax^2+bx+c=0$ and $bx^2+cx+a=0$ have a common root, then either $a+b+c=0$ or $a=b=c$.*

মনে কর, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়ের সাধারণ বীজ α.

$\therefore$ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ .... (1)

এবং $b\alpha^2+c\alpha+a=0$. .... (2)

সুতরাং, (1) ও (2) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{ab-c^2}=\frac{\alpha}{bc-a^2}=\frac{1}{ca-b^2}.$$

$\therefore$ $(bc-a^2)^2=(ab-c^2)(ca-b^2)$,

বা, $b^2c^2-2a^2bc+a^4=a^2bc-ab^3-ac^3+b^2c^2$,

বা, $a^4+ab^3+ac^3-3a^2bc=0$, [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$, [উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$.

$\therefore$ $a+b+c=0$, অথবা, $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

কিন্তু পূর্ণবর্গরাশির প্রত্যেকটি শূন্য না হইলে, তাহাদের সমষ্টি শূন্য হইতে পারে না। $\therefore$ $a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$;

অর্থাৎ $a=b=c$.

Ex. 5. *If the roots of $ax^2+2bx+c=0$ be α, β and those of $Ax^2+2Bx+C=0$ be $\alpha+\delta$, $\beta+\delta$, show that* $\dfrac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\dfrac{a}{A}\right)^2$.

$ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ α, β.

$\therefore$ $\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$.

$Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণের দুইটি বীজ $\alpha+\delta$, $\beta+\delta$.

$\therefore$ $(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)=-\dfrac{2B}{A}$ এবং $(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=\dfrac{C}{A}$.

এক্ষণে, $(\alpha-\beta)^2=\{(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)\}^2$,

বা, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\{(\alpha+\delta)+(\beta+\delta)\}^2-4(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$,

বা, $\dfrac{4b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}=4\dfrac{B^2}{A^2}-\dfrac{4C}{A}$.

উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া সরলকরণান্তে

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2},$$

বা, $\dfrac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\dfrac{a}{A}\right)^2$. [একান্তরকরণ-প্রক্রিয়া দ্বারা]

Ex. 6. *If $p>1$, prove that, for real values of x, the expression $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ lies between $\dfrac{p-1}{p+1}$ and $\dfrac{p+1}{p-1}$.*

মনে কর, $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}=y$,

তাহা হইলে $y(x^2+2x+p^2)=x^2-2x+p^2$.

পক্ষান্তর করিয়া, $x^2(y-1)+2x(y+1)+p^2(y-1)=0$.

x-সম্বলিত এই দ্বিঘাত সমীকরণে প্রদত্ত শর্তানুসারে x বাস্তব বলিয়া ইহার নিরূপক $4(y+1)^2-4p^2(y-1)^2$ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

অর্থাৎ, $4\{(y+1)^2-p^2(y-1)^2\}\nless 0$, বা, $(y+1)^2-p^2(y-1)^2\nless 0$,

বা, $(y+1+py-p)(y+1-py+p)\nless 0$,

বা, $\{y(1+p)+(1-p)\}\{y(1-p)+(1+p)\}\nless 0$,

বা, $(1+p)\left(y+\dfrac{1-p}{1+p}\right)(1-p)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\nless 0$,

বা, $(1-p^2)\left(y+\dfrac{1-p}{1+p}\right)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\nless 0$,

বা, $\left(y+\dfrac{1-p}{1+p}\right)\left(y+\dfrac{1+p}{1-p}\right)\ngtr 0$ [$p>1$ বলিয়া $1-p^2$ ঋণাত্মক]

বা, $\left(y-\dfrac{p-1}{p+1}\right)\left(y-\dfrac{p+1}{p-1}\right)\ngtr 0$.

$\therefore$ এই দুই উৎপাদকের গুণফল অবশ্যই ঋণাত্মক হইতে হইবে।

অতএব, এই দুই উৎপাদক এক্ষেত্রে কখন সমচিহ্নবিশিষ্ট অর্থাৎ উভয়েই ধনাত্মক বা উভয়েই ঋণাত্মক হইতে পারে না—একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

যেহেতু, $p > 1$, সুতরাং, $\frac{p+1}{p-1} > \frac{p-1}{p+1}$.

$\therefore$ $y - \frac{p-1}{p+1}$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ $y > \frac{p-1}{p+1}$.

এবং $y - \frac{p+1}{p-1}$ ঋণাত্মক হইবে অর্থাৎ $y < \frac{p+1}{p-1}$.

$\therefore$ $\frac{p-1}{p+1} < y < \frac{p+1}{p-1}$.

$\therefore$ y অর্থাৎ $\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$ এর মান $\frac{p+1}{p-1}$ এবং $\frac{p-1}{p+1}$ এর মধ্যবর্তী হইবে।

Ex. 7. *If by eliminating x between the equations $x^2+ax+b=0$ and $xy+l(x+y)+m=0$ a quadratic equation in y is formed whose roots are the same as those of the original quadratic equation in x, then either $a=2l$ and $b=m$ or $b+m=al$.*

$$x^2+ax+b=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

$$xy+l(x+y)+m=0 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

(2) হইতে আমরা পাই, $x(y+l) = -(ly+m)$. $\therefore$ $x = -\frac{ly+m}{y+l}$.

x-এর এই মান (1)-এ বসাইয়া, $\left(-\frac{ly+m}{y+l}\right)^2 - \frac{a(ly+m)}{y+l} + b = 0$.

সরলকরণান্তে আমরা নিম্নের y-সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ পাই

$$y^2(l^2-al+b)+y(2lm-al^2-am+2bl) + (m^2-alm+bl^2)=0. \quad \cdots\cdots \quad (3)$$

যেহেতু, সমীকরণ (1) এবং সমীকরণ (3)-এর বীজ দুইটি অভিন্ন,

$\therefore \quad \dfrac{m^2-alm+bl^2}{l^2-al+b}=b$ [উভয় পক্ষই অভিন্ন বীজ দুইটির গুণফল]

বা, $m^2-alm+bl^2=bl^2-abl+b^2$, বা, $m^2-b^2-al(m-b)=0$,

[পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(m-b)(m+b-al)=0.$

$\therefore \quad m=b$ অথবা $m+b=al.$

আবার বীজ দুইটি অভিন্ন বলিয়া উহাদের সমষ্টিও অভিন্ন।

$$\therefore \quad -\frac{2lm-al^2-am+2bl}{l^2-al+b}=-a,$$

বা, $2lm-al^2-am+2bl=al^2-a^2l+ab,$

বা, $2lm-am-2al^2+a^2l+2bl-ab=0,$

বা, $m(2l-a)-al(2l-a)+b(2l-a)=0,$

বা, $(2l-a)(m-al+b)=0,$ অর্থাৎ $2l=a,$ বা, $m+b=al,$

$\therefore \quad a=2l$ ও $b=m,$ অথবা $m+b=al.$

Ex. 8. *Show that*

$$\frac{a}{y-z}+\frac{b}{z-x}+\frac{c}{x-y}=0$$

an be expressed in terms of two linear factors.

ধর, $X=y-z,\ Y=z-x,\ Z=x-y$ .... (1)

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ

$$\frac{a}{X}+\frac{b}{Y}+\frac{c}{Z}=0,$$

বা, $aYZ+bZX+cXY=0$ .... (2)

(1) হইতে, $X+Y+Z=0$ .... (3)

(2) ও (3) হইতে,

$$(aY+bX)(X+Y)-cXY=0,$$

বা, $bX^2+(a+b-c)XY+aY^2=0$ .... (4)

ডান পক্ষ শূন্য বলিয়া, (4) কে

$$(Y-mX)(Y-nX)=0$$

লেখা যাইতে পারে, অবশ্য

$$\left.\begin{aligned} m+n &= -\frac{a+b-c}{a} \\ mn &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5) হইতে m ও n এর মান নির্ণয় করা সম্ভব এবং সেক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণ

$$[(z-x)-m(y-z)]\,[(z-x)-n(y-z)]=0,$$

বা, $[x+my-(1+m)z]\,[x+ny-(1+n)z]=0$

নির্ণেয় উৎপাদকদ্বয়।

Examples VI (B)

1. Show that the equations $(q-r)x^2+(r-p)x+(p-q)=0$ and $(r-p)x^2+(p-q)x+(q-r)=0$ have a common root.

2. If the roots of $ax^2+bx+c=0$ differ from those of $a'x^2+b'x+c'=0$ by a constant, show that $\dfrac{b^2-4ac}{a^2}=\dfrac{b'^2-4a'c'}{a'^2}$.

3. If one root of the equation $x^2+ax+b=0$ be a root of the equation $x^2+cx+d=0$, show that their other roots are the roots of the equation $(ad-bc)x^2-(b^2-d^2)x+bd(c-a)=0$.

4. For what values of m will the expression $y^2+2xy+2x+my-3$ be capable of resolution into two linear factors ?

5. If x and y are two real quantities connected by the equation $9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0$, then will x lie between 3 and 6, and y between [illegible] and 10 ?

6. If $(ax^2+bx+c)y+a'x^2+b'x+c'=0$, find the condition that x may be a rational function of y.

7. If the equations $x^2+px+q=0$ and $x^2+p'x+q'=0$

have a common root, show that it must be equal to either $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ or $\frac{q-q'}{p'-p}$.

8. Show that in the equation $x^2-3xy+2y^2+2x-3y-35=0$ for every real value of x there is a real value of y and for every real value of y there is a real value of x.

9. Show that the expression $A(x^2-y^2)-xy(B-C)$ always admits of two real linear factors.

10. If the expression $3x^2+2Pxy+2y^2+2ax-4y+1$ can be resolved into two linear factors, prove that P must be one of the roots of the equation $P^2-4aP+2a^2+6=0$.

11. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be the same as that of the roots of the equation $x^2-qx+p=0$, show that $p+q+4=0$, unless $p=q$.

12. If the equation $ax^2+bx+c=0$ be not altered when each of its coefficients is increased by the same quantity, show that $x^3=1$.

13. If x is real, prove that $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ can have no value between 5 and 9.

14. If x is real, prove that $\frac{x}{x^2-5x+9}$ must lie between 1 and $-\frac{1}{11}$.

15. Show that for real values of x, $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ is capable of having all real values.

16. If x be real, prove that $\frac{x^2+8x+80}{2x+8}$ can have all numerical values, except such as lie between 8 and -8.

17. Determine the limits of values between which the following functions must lie for real values of x

(i) $\dfrac{x^2+6x+49}{2x}$. (ii) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$. (iii) $\dfrac{x^2-3x+1}{2x^2-3x+2}$.

(iv) $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$.

18. Determine the sign of the following functions :

(i) $\dfrac{2x^2+3x+3}{x^2+3x+3}$. (ii) $\dfrac{6x-14-x^2}{x^2-10x+30}$.

19. If α, β be the roots of the equation $x^2+2ax+b=0$, form a quadratic equation with rational coefficients, one of whose roots is $\alpha+\beta+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$.

20. Find λ so that the values of x given by the equation $\dfrac{\lambda}{2x}=\dfrac{a}{x+c}+\dfrac{b}{x-c}$ may be equal. If λ_1, λ_2 are the two values of λ and x_1, x_2 the corresponding values of x, show that $\lambda_1\lambda_2=(a-b)^2$ and $x_1x_2=c^2$.

21. Show that the expression $\dfrac{(ax-b)(b'x-a')}{(bx-a)(a'x-b')}$ will be capable of all values when x is real, if a^2-b^2 and $a'^2-b'^2$ have the same sign.

22. If $ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, show that x and y are connected by a linear relation if $c^2 \leqslant a^2+b^2$.

23. If the equation $ax^2+2bx+c=0$ has real roots and if m and n are real numbers such that $0<n<m^2$, show that the equation $ax^2+2mbx+nc=0$ has real roots.

24. Show that $\dfrac{ac-b^2}{a}$ is the greatest or least value of the expression $ax^2+2bx+c$ according as a is negative or positive.

25. Find the greatest value of $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$.

26. Find the maximum and minimum values of the function $\frac{5x^2-x+5}{x^2+x+1}$ when x is real.

27. Show that the greatest and least values of $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$ for all real values of x are $\frac{5}{4}$ and 1 corresponding to the values 1 and 2 respectively of x.

28. If $x-a$ is a factor of $a_1x^2+2b_1x+c_1$ and $x+a$ is a factor of $a_2x^2+2b_2x+c_2$, prove that

$$(a_1c_2-c_1a_2)^2+4(a_1b_2+a_2b_1)(b_1c_2+b_2c_1)=0.$$

29. If x is real, prove that the expression $\frac{(x-a)(x-c)}{x-b}$ is capable of assuming all real values, provided that a, b, c are in ascending or descending order of magnitudes.

30. If each pair of the three equations

$$x^2-p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2-p_3x+q_3=0$$

have a common root (not common to all three), prove that

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_2p_3+p_3p_1+p_1p_2).$$

31. If the equations $ax^2+2bx+c=0,\ a'x^2+2b'x+c'=0$ have a common root, prove that the equation

$$(b^2-ac)x^2+(2bb'-ac'-a'c)x+(b'^2-a'c')=0$$

has equal roots.

32. Find the quadratic equations one of whose root is

(i) $\frac{2ab}{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2}}$. (ii) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)+i\sqrt{2ab}}$.

33. Show that the roots of $bx^2+(b-c)x=c+a-b$ are real, if those of $ax^2+b(2x+1)=0$ are imaginary.

34. Prove that if a, b, c are real quantities, the roots of the equation $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ are real. Prove also that the roots of this equation are equal, if a, b, c are in A.P.

35. If the expressions ax^2+bx+c and bx^2+cx+a have a common linear factor, show that either $a=0$, or $a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

36. Show that the two values of x obtained from the equations $y=mx+c$ and

(*a*) $x^2+y^2=a^2$, (*b*) $y^2=4ax$, (*c*) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

(*d*) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

will be equal, if

(*a*) $c=\pm a\sqrt{1+m^2}$, (*b*) $c=\frac{a}{m}$, (*c*) $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$,

(*d*) $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ respectively.

ANSWERS

4. -2. **6.** $(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$.

17. (i) Any real value except between -4, 10,

(ii) between 3 and $\frac{1}{3}$. (iii) between -1 and $\frac{5}{7}$.

(iv) Any real value except between 1 and -7. **18.** (i) positive.

(ii) negative. **19.** $x^2+4ax+2b$. **20.** $a+b\pm2\sqrt{ab}$. **25.** $\frac{1}{3}$.

26. 11 and 3. **32.** (i) $x^2-2(a+b)x+2ab=0$.

(ii) $x^2-2(a-b)x+a^2+b^2=0$.

সপ্তম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

7·1. বিন্যাস ও সমবায়।

শিক্ষার্থিগণের পক্ষে বিন্যাস এবং সমবায়ের পার্থক্য প্রথম প্রথম প্রণিধান করা একটু দুরূহ। সেইজন্য এ-সম্বন্ধে দুই-একটি বিষয়ের আলোচনা অপ্রাসঙ্গিক হইবে না।

মনে কর, Sri Pravakara, Sri Sen ও Sri Patel-নামীয় তিন ব্যক্তি ভ্রমণে বহির্গত হইয়াছেন। এই তিন ব্যক্তিকে লইয়া একটিমাত্র দল গঠিত হইয়াছে আমরা বলিব। তাঁহাদের নামের ক্রমানুসারে ভিন্ন ভিন্ন দল গঠিত হইয়াছে তাহা আমরা বলি না। Sri Sen, Sri Pravakara ও Sri Patel অথবা Sri Patel, Sri Sen ও Sri Pravakara যে-ক্রমেই আমরা এই নামগুলি উল্লেখ করি না কেন, ঐ তিন ব্যক্তি লইয়া একটি দলই সূচিত হইবে অর্থাৎ একটি সমবায় হইবে। আবার, এই তিন ব্যক্তি যদি তিন আসনযুক্ত একখানি bench-এ উপবেশন করেন, তবে তাঁহাদের বসিবার ক্রমানুসারে অর্থাৎ কোন্‌স্থানে কে বসিল, তাহা বিবেচনা করিলে এই উপবেশনের ব্যাপারে আমরা বলিতে পারি, তাঁহাদের "সাজানো" বা "বিন্যাস" বিভিন্ন।

আবার, a, b, c, d অক্ষর-চতুষ্টয়ের মধ্য হইতে যে-কোন তিনটি অক্ষর নির্বাচন করিতে হইলে আমরা প্রথম তিনটি অক্ষর a, b, c নির্বাচন করিতে পারি। এই নির্বাচনকার্যে প্রথমে b, তারপর c এবং পরে a নির্বাচন করিলে একই অক্ষরত্রয় a, b, c নির্বাচিত হইল। এক্ষেত্রে যে-কোন ক্রমেই এই অক্ষর তিনটি আমরা নির্বাচন করি না কেন, "নির্বাচন" বা "সমবায়" একই হইবে। নির্বাচিত বস্তুগুলির ক্রমের উপর সমবায়ের বিভিন্নতা নির্ভর করে না। যতক্ষণ পর্যন্ত বিভিন্নক্রমে নির্বাচিত বস্তুগুলি, এখানে তিনটি অক্ষর, শেষপর্যন্ত একই থাকে ততক্ষণ সমবায় একটিই হইবে। এখানে নিম্নের লিখিতমত ক্রমে যদি a, b, c অক্ষরত্রয় নির্বাচিত করা হয়, তবে তাহা একটিমাত্র সমবায় হইবে, ছয়টি নয়, কেননা নির্বাচিত তিনটি অক্ষর সকল ক্ষেত্রেই a, b, c. যেমন, abc, acb, bca, bac, cab এবং cba একই সমবায় abc.

a, b, c অক্ষর তিনটি উপরের মতো সাজাইলে এখানে লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক ভাগে অক্ষরগুলির ক্রম পরস্পর হইতে বিভিন্ন। এখানে অক্ষর তিনটি বিভিন্ন রকমে বিন্যস্ত হওয়ায় অক্ষরের ক্রমানুসারে প্রত্যেক ভাগ বিভিন্ন। সুতরাং a, b, c অক্ষরত্রয় তিনটি করিয়া লইয়া ছয়টি বিভিন্ন প্রকারে সাজাইতে পারি।

আবার, a, b, c অক্ষর তিনটির মধ্য হইতে দুইটি করিয়া লইয়া আমরা ক্রম-নিরপেক্ষ তিনটি ভাগ ab, ac এবং bc গঠন করিতে পারি। আমরা (ab), (ba) একই ভাগ বলিয়া ধরিয়া থাকি, কিন্তু অক্ষর দুইটির ক্রম অর্থাৎ প্রথমে কোন্‌টি তাহা ধরিলে ab, ba দুইটি পৃথক্ বিন্যাস হইবে। এখন আমরা বিন্যাস ও সমবায়ের সংজ্ঞা দিব।

বিন্যাস (Permutation): কতকগুলি বস্তু হইতে নির্দিষ্ট কয়েকটি অথবা সবকয়টি লইয়া যতপ্রকারে সম্ভব, ততপ্রকারে সাজাইলে যে সকল বিভিন্ন ধরণের সাজানো (arrangement) পাওয়া যায়, তাহাদের প্রত্যেকটিকে এক-একটি **বিন্যাস** (Permutation) বলা হয়।

সমবায় (Combination): আবার, ঐরূপ কতকগুলি বস্তু হইতে নির্দিষ্ট-সংখ্যক কয়েকটি অথবা সবগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকলপ্রকারে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে এক-একটি ভাগ (group) গঠন বা এক-একটি নির্বাচন (selection) করিলে ঐ প্রত্যেক ভাগ বা নির্বাচনকে এক-একটি **সমবায়** (Combination) বলা হয়।

উপরে যাহা বলা হইয়াছে, তাহা হইতে আমরা বলিতে পারি তিনটি অক্ষর a, b, c এর সবগুলি লইয়া abc, acb, bac, bca, cab এবং cba এই ছয়টি বিন্যাস, কিন্তু একটিমাত্র সমবায় গঠন করা যায়। আবার, a, b, c, d অক্ষর চারিটি হইতে তিনটি করিয়া লইয়া abc, abd, acd এবং bcd এই চারিটি বিভিন্ন সমবায় পাওয়া যায়। কিন্তু এই সমবায় চারিটির প্রত্যেকটি হইতে ছয়টি করিয়া মোট চব্বিশটি বিন্যাস পাওয়া যায়।

বিন্যাস ও সমবায় সম্বন্ধে যাহা বলা হইল তাহা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, সমবায় গঠন করিতে হইলে কোন বিশেষ একটি সমবায়ে মনোনীত বস্তুসমূহের সংখ্যা আমাদের প্রধান বিবেচ্য, তাহাদের ক্রম নহে। আবার, বিন্যাস গঠন করিতে হইলে বস্তুসমূহের সংখ্যা ও ক্রম উভয়েই বিবেচ্য।

7·2. এই অধ্যায়ের সাধারণ প্রতিজ্ঞাগুলির আলোচনার পূর্বে একটি অতি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা কয়েকটি উদাহরণ সাহায্যে আমরা বুঝাইব।

যদি কোন একটি প্রক্রিয়া বা কার্য m-সংখ্যক বিভিন্ন রকমে সাধন করা যায় এবং এইরূপ একরকমে কার্য করার পর যদি অপর একটি কার্য n-সংখ্যক বিভিন্ন রকমে সম্পন্ন করা যায়, তবে ঐ দুই কার্য্য সম্মিলিতভাবে $m \times n$ বিভিন্ন রকমে করা যাইবে। (If one operation can be performed in m ways, and when it has been performed in any one of these ways, a second operation can then be performed in n ways, the number of ways of performing the two operations will be $m \times n$.)

মনে কর, প্রথম কার্যটি (operation) m রকমের মধ্যে যে-কোন একরকমে করার পর দ্বিতীয় প্রকার কার্য n-সংখ্যক রকমে করা যায়। সুতরাং প্রথম প্রকার কার্যের পর দ্বিতীয় প্রকার কার্য করিলে প্রথম কার্যের প্রত্যেক রকমের জন্য দ্বিতীয় প্রকার কার্য n-রকমে করা যায়। যেহেতু প্রথম কার্য m-রকমে সম্পন্ন করা যায়, সুতরাং এই দুই কার্য একের পর অপর করিলে $m \times n$-সংখ্যক রকমে করা যাইবে।

ধর, কলিকাতা ও দক্ষিণেশ্বরের মধ্যে গঙ্গানদী দিয়া 5 খানি স্টীমার যাতায়াত করে। এক ব্যক্তি কলিকাতা হইতে একখানি স্টীমার যোগে দক্ষিণেশ্বরে যাইয়া তথা হইতে ভিন্ন একখানি স্টীমার যোগে কলিকাতাতে কত রকমে ফিরিতে পারে?

এখন, কলিকাতা ও দক্ষিণেশ্বরের মধ্যে 5 খানি স্টীমার যাতায়াত করে বলিয়া প্রথম যাত্রা অর্থাৎ কলিকাতা হইতে দক্ষিণেশ্বরে যাওয়া 5 রকমে সাধিত হইতে পারে, কেননা ঐ ব্যক্তি 5 খানি স্টীমারের যে-কোন একখানিতে দক্ষিণেশ্বরে যাইতে পারে। যে স্টীমারে সে দক্ষিণেশ্বরে যায়, তাহাতে সে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে না বলিয়া অপর 4 খানি স্টীমারের যে-কোন একখানিতে সে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে। অর্থাৎ সে 4 রকমে ফিরিতে পারে। সুতরাং, যে-কোন একরকমে দক্ষিণেশ্বরে যাইলে তথা হইতে সে 4 রকমে কলিকাতাতে ফিরিতে পারে। সে 5 রকমে দক্ষিণেশ্বরে যাইতে পারে বলিয়া প্রশ্নের শর্তানুযায়ী (এক স্টীমারে যাইয়া ভিন্ন এক স্টীমারে ফিরিয়া আসা) সে মোট 5×4 বা 20 রকমে কলিকাতা হইতে দক্ষিণেশ্বরে যাতায়াত করিতে পারে।

আবার, মনে কর, কোন স্টেশনে তিনটি হোটেলের প্রত্যেকটিতে অতিরিক্ত মাত্র একজন লোকের স্থান হইতে পারে। এখন, ঐ স্টেশনে 5 ব্যক্তি একসঙ্গে উপস্থিত হইলে কত বিভিন্ন উপায়ে তাহাদের ঐ হোটেল তিনটিতে স্থান দেওয়া যাইতে পারে?

পাঁচ ব্যক্তির মধ্যে যে কেহ প্রথমে একটি হোটেলে স্থান পাইতে পারে।

∴ প্রথম হোটেলের শূন্যস্থান 5 রকম বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। প্রথম হোটেলে এক ব্যক্তি স্থান পাইলে, দ্বিতীয় হোটেলে অবশিষ্ট 4 ব্যক্তির যে কেহ আশ্রয় লইতে পারে।

অতএব, দ্বিতীয় হোটেলের শূন্যস্থান 4 রকমে পূর্ণ করা যাইতে পারে।

এখন, প্রথম হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 5 রকমের প্রত্যেক রকমের সহিত দ্বিতীয় হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 4 রকমের প্রত্যেক রকম যুক্ত করা যায়। সুতরাং, প্রথম দুই হোটেলের শূন্যস্থান 5×4 রকমে পূর্ণ করা যায়।

প্রথম দুই হোটেলের শূন্যস্থান 5×4 বিভিন্ন রকমের যে-কোন একরকমে পূর্ণ হইলে, তৃতীয় হোটেলের শূন্যস্থান 3 রকমে পূর্ণ করা যায়, যেহেতু প্রথম দুই হোটেলে দুইজন আশ্রয় লইলে অবশিষ্ট 3 জনের যে কেহ তৃতীয় হোটেলে স্থান লইতে পারে।

এখন, 3 রকমের এই প্রত্যেকটির সহিত প্রথম দুই হোটেলের শূন্যস্থান পূর্ণ করিবার 5×4 রকমের প্রত্যেকটি যুক্ত করা যায় বলিয়া হোটেল 3টির শূন্যস্থান $5 \times 4 \times 3$ বা 60 রকমে পূর্ণ করা যায়।

Sec. A. বিন্যাস

7·3. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে r-সংখ্যক (r ⩽ n) বস্তু একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়। [*To find the number of permutations of n dissimilar things taken r (r ⩽ n) at a time.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া r-সংখ্যক শূন্যস্থান পূরণ করা এবং প্রার্থিত বিন্যাস নির্ণয় একই ব্যাপার। ইহা সুস্পষ্ট যে, প্রথম শূন্যস্থান n-রকমে পূরণ করা যায়, কেননা এই স্থানে n-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করা যাইতে পারে। প্রথমে শূন্যস্থানটি যে-কোন একরকমে পূরণ করিলে দ্বিতীয় শূন্যস্থানে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করিয়া $(n-1)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে। যেহেতু, যে-কোন একরকমে প্রথম শূন্যস্থানের পূরণ দ্বিতীয় স্থানের $(n-1)$-সংখ্যক রকমের পূরণের সহিত যুক্ত

করা যায়, সুতরাং প্রথম দুই শূন্যস্থান $n(n-1)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে। এখন, প্রথম দুই শূন্যস্থান n-সংখ্যক বস্তু হইতে দুইটি বস্তু লইয়া যে-কোন একরকমে পূরণ করিলে অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটি লইয়া তৃতীয় শূন্যস্থান $(n-2)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যায়। পূর্বের অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে বলা যায়, প্রথম তিনটি শূন্যস্থান $n(n-1)(n-2)$-সংখ্যক রকমে পূরণ করা যাইতে পারে।

অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে লক্ষ্য কর, প্রত্যেক শূন্যস্থান-পূরণের সঙ্গে সঙ্গে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যাতে একটি নূতন উৎপাদক উপস্থিত হইতেছে এবং যে-কোন স্তরে 'পূর্ণ শূন্যস্থানের সংখ্যা' নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যাতে উৎপাদকের সংখ্যার সহিত সমান। এখন, যেহেতু r-তম উৎপাদক $= n-(r-1) = n-r+1$, n-সংখ্যক শূন্যস্থান যতরকমে পূর্ণ করা যায়, তাহার সংখ্যা $= n(n-1)(n-2)\cdots r$-তম উৎপাদক পর্যন্ত $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যস্ত করিলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)$.

ইহা সংক্ষেপে ${}^nP_r$ রূপে লিখিত হয়।

সুতরাং, $\mathbf{{}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}$.

দ্রষ্টব্য। উপরোক্ত আলোচনায় ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান যে, n এবং r উভয়েই ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং পূর্বেই অনুমান করিয়া লওয়া হইয়াছে যে, $r \leqslant n$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. n-সংখ্যক বস্তুর সকলগুলিকে লইয়া বিন্যস্ত করিলে অর্থাৎ $r=n$ ধরিলে,

$${}^nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-2)\}\{n-(n-1)\}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1,$$

অর্থাৎ প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফল।

ইহা সুস্পষ্ট যে, ${}^nP_{n-1} = n(n-1)\ \ldots\ 3.2. = {}^nP_n$.

এই গুণফল সাধারণতঃ $\underline{|n}$ বা $n\,!$ এই প্রতীকদ্বয়ের যে-কোন একটির দ্বারা সূচিত হইয়া থাকে এবং ইহা '**factorial** n' রূপে পঠিত হয়।

$\therefore \quad {}^nP_n = \lfloor n$ বা $n\,! = 1.2.3.4. \dots. (n-1).n.$

$\therefore \quad \lfloor 6 = 1.2.3.4.5.6 = 720,$

$\lfloor 4 = 1.2.3.4 = 24,$ ইত্যাদি।

আবার, $\lfloor n = n(n-1)(n-2) \dots. 3.2.1 = n \; \lfloor n-1.$

অনুসিদ্ধান্ত 2.

$${}^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1).\;\lfloor n-r}{\lfloor n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r},$$

দ্রষ্টব্য। ইহা সুস্পষ্ট যে, $r=n$ হইলে ${}^nP_r$ এর মান বৃহত্তম। $\because \quad {}^nP_n = {}^nP_{n-1}, \quad \therefore \quad {}^nP_r$ বৃহত্তম যখন $r=n$ বা $n-1$.

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে r-সংখ্যক বস্তু একযোগে লইয়া বিভিন্ন বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ের বিকল্প পদ্ধতি।

মনে কর, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যা ${}^nP_r$.

অতএব, n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে $(r-1)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া সকল রকমে বিন্যস্ত করা হইলে বিন্যাস-সংখ্যা হইবে ${}^nP_{r-1}$.

ইহার প্রত্যেকটি বিন্যাসের সহিত অবশিষ্ট $(n-r+1)$ বস্তুর একটি করিয়া যুক্ত করিলে n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তুর এক-একটি বিন্যাস পাওয়া যাইবে। সুতরাং, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^nP_{r-1} \times (n-r+1)$,

অর্থাৎ ${}^nP_r = {}^nP_{r-1} \times (n-r+1).$

এক্ষণে, r এর পরিবর্তে $r-1, r-2, r-3 \dots 3, 2, 1$ বসাইয়া আমরা পাই,

$${}^nP_{r-1} = {}^nP_{r-2} \times (n-r+2)$$
$${}^nP_{r-2} = {}^nP_{r-3} \times (n-r+3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$${}^nP_3 = {}^nP_2 \times (n-2)$$
$${}^nP_2 = {}^nP_1 \times (n-1)$$
$${}^nP_1 = n.$$

উপরস্থ সমীকরণগুলির বাম পক্ষ ও দক্ষিণ পক্ষের রাশিগুলি পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারিত করিলে

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)....(n-r+2)(n-r+1).$$

7·4. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস। [*Permutation of things not all different.*]

n-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে যদি p-সংখ্যক বস্তু একরকম, q-সংখ্যক বস্তু আর একরকম এবং r-সংখ্যক বস্তু অন্য আর একরকম হয়, এবং অবশিষ্টগুলি বিভিন্ন রকম হয়, তবে সেইরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি লইয়া বিন্যস্ত করিয়া বিন্যস্ত-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the total number of permutations of n things taken all at a time, when p of them are alike of one kind, q of them are alike of another kind, r of them are alike of a third kind and the rest are all different.*]

মনে কর, একটি আলমারিতে n-সংখ্যক পুস্তক আছে। সবচেয়ে উপরের তাকে p-সংখ্যক বীজগণিত (একই প্রণেতার), তাহার নিম্নের তাকে q-সংখ্যক ত্রিকোণমিতি, তাহার নিম্নের তাকে r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি আছে। নীচের তাকগুলিতে অন্যান্য বিভিন্ন (যে-কোনটি অন্যগুলির হইতে পৃথক্) পুস্তক আছে।

মনে কর, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা x। এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে p-সংখ্যক একই পুস্তক বীজগণিত আছে। এই p-সংখ্যক বীজগণিতগুলি যদি p-সংখ্যক বিভিন্ন পুস্তকে রূপান্তরিত করা যায় (বীজগণিতগুলির উপর 1, 2........p সংখ্যাগুলি লিখিয়া), তবে p-সংখ্যক পরিবর্তিত পুস্তকগুলি ব্যতীত অপর পুস্তকগুলির অবস্থানের কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়া এই x-সংখ্যক বিন্যাসের যে-কোন একটির হইতে শুধু পরিবর্তিত পুস্তকগুলির বিন্যাস সাধন করিয়া $\underline{|p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইতে পারে।

সুতরাং, মোট বিন্যাস-সংখ্যা $x \times \underline{|p}$ হইবে। অনুরূপভাবে, এই $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে q-সংখ্যক ত্রিকোণমিতিগুলি পূর্বের ন্যায় বিভিন্ন পুস্তকে পরিবর্তিত করিয়া লইলে, $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসের এক-একটি হইতে $\underline{|q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, এখন বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $x \times \underline{|p} \times \underline{|q}$. আবার, r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক

জ্যামিতিগুলি ঐরূপ পরিবর্ত্তিত করিলে, এক-একটি বিন্যাস হইতে $\lfloor r$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে এবং তখন মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে

$$x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r.$$

এক্ষণে p-সংখ্যক একই রকম বীজগণিত q-সংখ্যক একই রকম ত্রিকোণমিতি ও r-সংখ্যক স্থানাঙ্ক জ্যামিতিকে, বিভিন্ন পুস্তকে পরিবর্তিত করার ফলে ঐ আলমারিতে মোট বিভিন্ন (যে-কোনটি অন্যগুলি হইতে পৃথক্) পুস্তকের সংখ্যা n, এবং এই n-সংখ্যক পুস্তকগুলির সবগুলি লইয়া বিন্যস্ত করিলে বিন্যাস-সংখ্যা $\lfloor n$ হয়।

$$\therefore \quad x \times \lfloor p \times \lfloor q \times \lfloor r = \lfloor n.$$

$$\therefore \quad x = \frac{\lfloor n}{\lfloor p \cdot \lfloor q \cdot \lfloor r}.$$

দ্রষ্টব্য। উপরের প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ সাধারণ এবং তিন-এর অধিক প্রকারের বিভিন্ন বস্তু দেওয়া থাকিলেও বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ে উপরের সূত্রটি প্রযোজ্য।

7·5. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া এমন একটি বিন্যাস রচনা করিতে হইবে, যাহার প্রত্যেকটিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু সবসময় বর্তমান থাকে।

[*To find the total number of permutations of n dissimilar things taken r at a time, in which a particular thing always occurs.*]

মনে কর, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুগুলিকে n অক্ষর যথা, $a_1, a_2, \ldots a_n$ দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে। ধর, a_1 নির্দিষ্ট অক্ষরটি সর্বদাই প্রত্যেকটি বিন্যাসের মধ্যে থাকে। a_1 সরাইয়া রাখ। সুতরাং, এখন $(n-1)$-সংখ্যক অক্ষর হইতে $(r-1)$-সংখ্যক অক্ষর লইয়া বিন্যাস করিতে হইবে।

সুতরাং, বিন্যাস-সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$.

এখন যেহেতু a_1 অক্ষরটি প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়$\cdots r$তম স্থানে অবস্থান করিতে পারে এবং এর প্রত্যেকটির বিন্যাস-সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$

সুতরাং, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= r.{}^{n-1}P_{r-1}$.

অনুসিদ্ধান্ত। উপরোক্ত বিন্যাসের যেগুলিতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকে না সেগুলির সংখ্যা সহজেই ${}^{n-1}P_r$.

যেহেতু ${}^nP_r = n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা

অতএব, $\quad {}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1}.$

আবার, § 7·3 (একাদশ শ্রেণী) অনু. 2 অনুসারে,

$$
\begin{aligned}
{}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1} &= \frac{|n-1}{|n-r-1} + r.\frac{|n-1}{|n-r} \\
&= \frac{|n-1}{|n-r-1}\left[1 + \frac{r}{n-r}\right] \\
&= \frac{|n-1.n}{|n-r-1.(n-r)} = \frac{|n}{|n-r} = {}^nP_r.
\end{aligned}
$$

7·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Three persons enter a railway carriage in which there are 8 seats ; in how many ways can they seat themselves ?*

প্রথম ব্যক্তি গাড়ীর আটটি আসনের যে-কোন একটিতে উপবেশন করিতে পারে বলিয়া সে 8 প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

প্রথম ব্যক্তি যে-কোন একটি আসনে উপবেশন করিলে দ্বিতীয় ব্যক্তি অবশিষ্ট সাতটি আসনের যে-কোনটিতে উপবেশন করিতে পারে বলিয়া 7 প্রকারে সে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

প্রথম এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি যে-কোন একপ্রকারে আসন গ্রহণ করিলে ছয়টি আসন শূন্য থাকিবে ; সুতরাং, তৃতীয় ব্যক্তি 6 প্রকারে আসন গ্রহণ করিতে পারে।

এই তিন ব্যক্তির প্রত্যেকের আসন-গ্রহণের বিভিন্ন উপায়গুলির প্রত্যেকটি পরস্পর যুক্ত করা যায় বলিয়া নির্ণেয় উপায়গুলির মোট সংখ্যা

$$= 8 \times 7 \times 6 = 336.$$

Ex. 2. *If the number of permutations of n things taken 3 at a time in which one particular thing always occurs be equal to the number in which it does not occur, find n.*

নির্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু হইতে

তিনটি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে তাহাদের কোনটিতে নির্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে না এবং n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া নির্দিষ্ট বস্তুশূন্য বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে। অতএব, এই বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^{n-1}P_3$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া গঠিত নির্দিষ্ট বস্তু-যুক্ত বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^nP_3 - {}^{n-1}P_3$.

কিন্তু, নির্দিষ্ট বস্তুশূন্য বিন্যাসগুলি এবং নির্দিষ্ট বস্তুযুক্ত বিন্যাসগুলির সমষ্টি n-সংখ্যক বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যার সমান।

$\therefore\ 2 \times {}^{n-1}P_3 = {}^nP_3$ বা $2(n-1)(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-2)$,
বা, $2(n-3) = n$ বা $n = 6$.

Ex. 3. *How many different numbers can be formed by using* 5 *out of the* 8 *digits* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ?

এখানে, 1 হইতে 8 পর্যন্ত অঙ্কগুলি পরস্পর বিভিন্ন বলিয়া আমাদের ৪টি বিভিন্ন বস্তুর মধ্য হইতে 5টি লইয়া বিন্যাস রচনা করিতে হইবে।

$\therefore$ 5 অঙ্কের রাশিগুলির নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^8P_5 = 8.7.6.5.4 = 6720$.

Ex. 4. *How many different numbers can be formed by using the six digits* 2, 4, 6, 8, 9, 0 ?

ছয়টি বিভিন্ন অঙ্কদ্বারা গঠিত রাশিসংখ্যা স্পষ্টতঃই $\lfloor 6$, কিন্তু অঙ্কগুলির একটি 0 হওয়ায় যে সমস্ত রাশির প্রথমেই 0 থাকিবে, সেগুলি বাদ দিতে হইবে। যে সকল রাশির প্রথমেই 0 থাকিবে, তাহার সংখ্যা অবশিষ্ট পাঁচটি অঙ্ক 2, 4, 6, 8, 9 লইয়া গঠিত রাশিসংখ্যার সমান হইবে এবং 2, 4, 6, 8, 9 এই পাঁচটি অঙ্ক লইয়া গঠিত রাশিসংখ্যা $= \lfloor 5$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় রাশিসংখ্যা} = \lfloor 6 - \lfloor 5 = 6.5.4.3.2.1 - 5.4.3.2.1 = 720 - 120 = 600.$$

Ex. 5. *How many different words can be formed by using all the letters of the word* facetious? *In how many of them will the vowels be always together ?*

এখানে সর্বশুদ্ধ 9টি বিভিন্ন অক্ষর আছে। এই অক্ষরগুলির সবকয়টি লইয়া গঠিত শব্দসংখ্যা স্থির করিতে হইলে 9টি বিভিন্ন বস্তুর সবকয়টি লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

$\therefore$ সবকয়টি অক্ষর লইয়া গঠিত নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^9P_9$

$$= 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 362880.$$

এখানে সর্বসমেত 9টি অক্ষর আছে, তন্মধ্যে 5টি vowel. এই 5টি vowel a, e, i, o, u-কে একটিমাত্র অক্ষর (aeiou) মনে করিয়া যদি বন্ধনীযুক্ত করা হয়, তবে অক্ষরসংখ্যা দাঁড়ায় 5টি, যথা $f, c, t, s,$ (aeiou).

$\therefore$ এই পাঁচটি অক্ষর $\lfloor 5$ রকম উপায়ে সাজানো যায়।

কিন্তু 5টি vowel একত্রে রাখিয়া $\lfloor 5$ রকমে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দসংখ্যা $= \lfloor 5 \times \lfloor 5 = 5.4.3.2.1 \times 5.4.3.2.1$

$$= 14400.$$

দ্রষ্টব্য। কতগুলি বিন্যাসে vowelগুলি একত্রিত থাকিবে না নির্ণয় করিতে হইলে, লক্ষ্য কর,

সেইরূপ বিন্যাস সংখ্যা = মোট বিন্যাস-সংখ্যা − যে সকল বিন্যাসগুলিতে 'vowel'গুলি একত্রিত থাকিবে

$$= 362880 - 14400 = 348480.$$

Ex. 6. *Find the number of ways in which the letters of the word* numerical *can be arranged so that the vowels may occupy only odd positions.*

প্রদত্ত শব্দে বর্ণসংখ্যা 9টি, তন্মধ্যে vowel 4 এবং consonant 5টি। বর্ণের এই 9টি স্থানের মধ্যে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম, সপ্তম ও নবম এই পাঁচটি অযুগ্মস্থানের যে-কোন 4টিতে vowel 4টি বসাইতে হইবে এবং পাঁচটি consonant অবশিষ্ট 5টি স্থানে বসাইতে হইবে।

এখন, vowel 4টিকে অযুগ্ম 5টি স্থানে ${}^5P_4$ বা 5.4.3.2 বা 120টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যায়। 9টি স্থানের মধ্যে 4টি অযুগ্মস্থানে vowel 4টি যে-কোন উপায়ে বসাইলে অবশিষ্ট 5টি স্থানে 5টি consonant কে ${}^5P_5$ বা $\lfloor 5$ বা 120টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যাইতে পারে।

Vowel-গুলিকে 120টি উপায়ে বসানো যায় বলিয়া,

নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= 120 \times 120 = 14400.$

Ex. 7. *How many numbers lying between* 2000 *and* 6000 *may be formed with the digits* 1, 2, 3, 5, 7, 9, 0 *using any of them only once ?*

স্পষ্টতঃ, নির্ণেয় রাশিগুলির প্রত্যেকটি 4-অঙ্কবিশিষ্ট হইবে এবং প্রত্যেকটির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইবে।

নির্ণেয় রাশিগুলি গঠন করিতে প্রদত্ত 7টি অঙ্কের 4টি ব্যবহার করিতে হইবে। যেহেতু প্রত্যেক রাশির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইতে হইবে, সুতরাং এই তিন অঙ্কের একটি ব্যতীত অবশিষ্ট 6টি অঙ্কের মধ্যে 3টি লইয়া বিন্যাস গঠন করিয়া প্রত্যেক বিন্যাসের পূর্বে 2, 3 অথবা 5 যুক্ত করিলে নির্ণেয় রাশিসংখ্যা পাওয়া যাইবে।

এক্ষণে, $^6P_3 = 6.5.4 = 120.$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রত্যেক রাশির প্রথম অঙ্ক 2, 3 অথবা 5 হইলে প্রতি ক্ষেত্রেই গঠিত রাশিসংখ্যা $= 120.$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট রাশিসংখ্যা $= 3 \times 120 = 360.$

Ex. 8. *In how many ways can the letters of the word* Number *be arranged ? How many of these arrangements begin with 'N' ? How many of these arrangements begin with 'N' and end with 'r' ? How many of these arrangements do not begin with 'N' ? How many of these arrangements begin with 'N' but do not end with 'r' ?*

লক্ষ্য কর, '*Number*' কথাটিতে 6টি অক্ষর রহিয়াছে এবং প্রত্যেকটি অক্ষর একটি হইতে অপরটি ভিন্ন। সুতরাং, কথাটির সবগুলি অক্ষর লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা

$$^6P_6 = 6\,! = 720.$$

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইয়াছে তাহা বাহির করিতে প্রথমে N-কে সরাইয়া রাখ। এখন বাকী পাঁচটি অক্ষরের $^5P_5 = 5\,!$ উপায়ে বিন্যাস রচনা করা যাইবে। ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত N কে সামনে যুক্ত করা যাইবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে

$$\text{বিন্যাস-সংখ্যা} = 120.$$

যে সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু এবং r দ্বারা শেষ হইয়াছে তাহা স্থির করার জন্য

N ও r কে নির্দিষ্ট রাখিয়া উহার ভিতরের মোট চারিটি অক্ষরকে লইয়া যতরকমে সম্ভব বিন্যাস সাধন কর। এক্ষেত্রে $4! = 24$ উপায়ে তাহা সম্ভব। সুতরাং,

বিন্যাস-সংখ্যা $= 24$.

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইবে না সেগুলির বিন্যাস-সংখ্যা

= মোট বিন্যাস-সংখ্যা − যে সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু হইয়াছে
$= 720 - 120 = 600$.

যে-সমস্ত বিন্যাস N দ্বারা শুরু কিন্তু r দ্বারা শেষ হইবে না তাহা স্থির করার জন্য লক্ষ্য কর, এইরূপ

বিন্যাস-সংখ্যা = মোট বিন্যাস-সংখ্যা, যেগুলি N দ্বারা শুরু হইয়াছে − মোট বিন্যাস-সংখ্যা যেগুলি N দ্বারা শুরু ও r দ্বারা শেষ হইয়াছে
$= 120 - 24 = 96$.

Ex. 9. *Show that the number of ways in which n books may be arranged on a shelf so that two particular books shall not be together is* $(n-2)\,\underline{|n-1}$.

n-সংখ্যক পুস্তকের সকলগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিন্যাস গঠন করিলে কতকগুলি বিন্যাসে নির্দিষ্ট পুস্তকদ্বয়, ধর, A, B একসঙ্গে থাকিবে এবং অবশিষ্ট বিন্যাসগুলিতে ঐ দুইখানি পুস্তক একসঙ্গে থাকিবে না।

এখন, যে-সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে (A, B) থাকিবে, তাহা স্থির করিতে হইলে পুস্তক দুইখানি একত্রে যুক্ত করিয়া (AB) একখানি পুস্তক মনে করিয়া $(n-1)$-সংখ্যক পুস্তকের বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয় এবং এই সংখ্যা $= \underline{|n-1}$.

আবার, পুস্তক দুইখানি B, A ক্রমেও থাকিতে পারে এবং এক্ষেত্রেও বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{|n-1}$.

$\therefore$ যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকিবে তাহার সংখ্যা
$= 2\underline{|n-1}$.

কিন্তু, যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকে এবং যে সকল বিন্যাসে একত্রে থাকে না, তাহাদের সমষ্টি = n-সংখ্যক পুস্তকের সকলগুলি লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{|n}$.

$\therefore$ যে সকল বিন্যাসে পুস্তক দুইখানি একত্রে থাকিবে না তাহার সংখ্যা
$= \underline{|n} - 2\underline{|n-1} = n\underline{|n-1} - 2\underline{|n-1} = (n-2)\underline{|n-1}$.

Ex. 10. *In how many ways can 8 articles be arranged in a row so that three particular ones may come together in each arrangement ?*

In how many ways can they be arranged so that two particular ones do not come together ?

মনে কর, নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি A, B, C. সকল বিন্যাসেই এই বস্তু তিনটি পাশাপাশি থাকিতে হইলে উহাদিগকে বন্ধনীভুক্ত করিয়া একটিমাত্র বস্তু (ABC) মনে করিলে বস্তু-সংখ্যা 6 হইবে। ইহাদের সকলগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকারে সাজাইলে লব্ধ বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6$. আবার এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে একটিমাত্র বিবেচিত বন্ধনীভুক্ত তিনটি বস্তু (A, B, C) আছে এবং এই তিনটি বস্তু নিজেদের মধ্যে $\lfloor 3$ বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6 \times \lfloor 3 = \lfloor 6 \times 6 = 4320$.

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট বস্তু দুইটি A, B মনে কর। কোন শর্তের অধীন না করিয়া 8টি বস্তু ভিন্ন ভিন্ন রকমে একসারিতে বিন্যস্ত করিলে কতকগুলি বিন্যাসে A, B পাশাপাশি থাকিবে এবং কতকগুলিতে পাশাপাশি থাকিবে না। এই দুই-জাতীয় বিন্যাস-সংখ্যার সমষ্টি সাধারণ সূত্রানুসারে $\lfloor 8$-এর সমান হইবে।

$\therefore$ এই $\lfloor 8$-সংখ্যক বিন্যাস হইতে যে সমস্ত বিন্যাসে A, B পাশাপাশি থাকিবে তাহার সংখ্যা বাদ দিলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

পূর্বের ন্যায় A, B কে একটি বস্তু মনে করিয়া বন্ধনীভুক্ত করিয়া 7টি বস্তুর বিভিন্ন বিন্যাসে যে সকল ক্ষেত্রে A, B পাশাপাশি থাকিবে উপরোক্ত নিয়মে তাহার সংখ্যা $\lfloor 7 \times \lfloor 2$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \lfloor 8 - \lfloor 7 \times \lfloor 2 = 8\lfloor 7 - 2\lfloor 7 = 6\lfloor 7 = 30240$.

Ex. 11. *In how many ways can the letters of the word* Punctuation *be arranged !*

লক্ষ্য কর, *Punctuation* কথাটিতে মোট 11টি অক্ষর আছে তন্মধ্যে 2টি u, 2টি t ও 2টি n আছে। সুতরাং,

মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= \dfrac{11!}{2!\,2!\,2!}$ [§ 7·4 অনুসারে]

$$= \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}{2.2.2}$$

$$= 4989600.$$

Ex. 12. *Show that the letters of the word* Anticipation *can be arranged in three times as many ways as the letters of the word* Commencement.

ধর, *Anticipation*-এর অক্ষরগুলির বিন্যাস-সংখ্যা $= x$. সুতরাং,

$$x = \frac{12!}{2!2!2!3!}$$ [§ 7·4 (একাদশ শ্রেণী) অনুসারে]

সেইভাবে *Commencement*-এর অক্ষরগুলির বিন্যাস-সংখ্যা যদি y হয়, তবে

$$y = \frac{12!}{2!2!3!3!}$$ [§ 7·4 অনুসারে]

$$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

$$\therefore \quad x = 3y.$$

সুতরাং, *Anticipation*-এর বিন্যাস-সংখ্যা *Commencement*-এর বিন্যাস-সংখ্যার তিনগুণ।

Examples VII(A)

1. Find the values of : ${}^{10}P_4$, ${}^{25}P_2$, ${}^{20}P_r$. $(r < 15)$

2. How many different arragements can be made by taking (i) four, (ii) all of the letters of the word *consider ?*

3. (i) If ${}^{n}P_4 : {}^{n-1}P_5 = 2 : 3$, find n.

(ii) ${}^{m+n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$, find m and n.

4. Two persons go into a railway carriage with 6 vacant seats. In how many different ways can they sit themselves ?

5. How many different numbers can be formed by taking 4 out of the 7 digits 0, 2, 4, 5, 7, 8, 9 using any of them only once ?

6. How many numbers between 3000 and 4000 can be formed with the digits 9, 3, 4, 6 ?

7. How many numbers between 100 and 1000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?

8. How many different numbers can be formed by using the seven digits 2, 3, 4, 3, 3, 1, 2 ? How many with the digits 2, 3, 4, 3, 3, 0, 2 ?

9. In how many of the permutations of 10 things 4 at a time will one particular thing (i) always occur, (ii) never occur ?

10. There are 25 stations on a railway line. How many different kinds of single tickets must be printed so that it may be possible to book from one station to another ?

11. Out of the 26 letters of the English alphabet in how many ways can a word be made consisting of 5 different letters, two of which must be *a* and *e* ?

12. How many even numbers of 5 digits can be formed with the digits 0, 2, 3, 3, 4, 7 ?

13. Prove that

$$^{n}P_{n}=1+1.{}^{1}P_{1}+2.{}^{2}P_{2}+3.{}^{3}P_{3}+\cdots+(n-1).{}^{n-1}P_{n-1}.$$

14. How many words can be formed with 3 consonants and 2 vowels taken from the English alphabet ?

15. A man likes to send his four sons in 6 different professions. In how many different ways can the sons take up the professions, if no two of them enter the same profession ?

16. Five gentlemen and one lady wish to enter a bus with only three vacant seats ; in how many ways can the seats be occupied (i) when one of the places is to be occupied by the lady, (ii) when there is no restriction.

17. Of the words formed with all the letters of the word *Pneumonia* how many will not begin with *PN* ?

18. Find how many words can be formed with the letters of the word *abstemious*, so that the 5 vowels always appear together.

19. Of the words formed with all the letters of the word *Combine*, how many will begin with *C* and end in *e* ?

20. In how many ways can the letters of the word *Article* be arranged, so that the vowels may occupy only odd positions ?

21. Find the number of arrangements that can be made of the letters of the word *Youngster* so that the vowels may not all be in consecutive positions in anyone of them.

22. In how many ways can 24 P. U. and 17 H. S. candidates be arranged in a line so that no two H. S. candidates may occupy consecutive positions ?

23. Find the number of different arrangements that can be made of the bars of seven colours (violet, indigo, blue, green, yellow, orange and red) so that blue and green shall never come together.

24. Find the number of ways in which 10 different books may be arranged on a shelf so that two particular books shall never come together.

25. Find the number of arrangements that can be made with the letters of the word *emulation* all at a time so that the vowels may not all be in consecutive positions in any of them.

26. Find how many different words can be formed with 5 given letters, 3 consonants and 2 vowels, no two consonants being juxtaposed in any word.

27. In how many ways can *n* examination papers be arranged so that best and worst papers never come together ?

28. How many different permutations can be made out of the letters of the following words taken all together :

(i) India (ii) Calcutta
(iii) Procession (iv) Committee
(v) Constantinople (vi) Examination
(vii) Abracadabra (viii) Nomenclature.

29. Of the words formed with all the letters of the word *different* how many will begin with d and end in t ?

30. If X, Y, Z denote the numbers of different permutations that can be made from the words

Permutation, Combination, Arrangement,

show that $2Y^2 = XZ$.

31. Show that the letters of the word *Calcutta* can be arranged in twice as many ways as the letters of the word *America.*

32. A library has 5 copies of one book, 4 copies of each of two books, 6 copies of each of three books and single copies of eight books. In how many ways can all the books be arranged ?

33. There are fifteen rowing clubs ; two of the clubs have each three boats on the river, five others have each two and remaining eight have each one ; find an expression for the number of different lists that can be formed of the order of the 24 boats, observing that the second boat of a club must occur after the first and third after the second.

34. In how many ways can the letters of the word *Utilitarianism* be re-arranged without changing the position of any of the vowels ?

35. Find the number of ways in which the letters of the word *arrange* can be arranged, so that two r's do not come together. In how many ways the word can be arranged if neither the two r's nor the two a's are allowed to come together ?

36. There are 9 letters of which some are alike and the rest all different ; if 15120 words can be formed with them all together, how many letters are alike ?

ANSWERS

1. (i) 5040 ; (ii) 600 ; (iii) 20. 19. 18 ... (21 − r).

2. (i) 1680 ; (ii) 40320. **3.** (i) 8 ; (ii) $m=6$. $n=2$. **4.** 30.

5. 720. **6.** 6. **7.** 120. **8.** 420 ; 360.

9. 2016 ; 3024. **10.** 600. **11.** 242880. **12.** 156.

14. 159600. **15.** 360. **16.** 60, 120. **17.** 180720.

18. 43200. **19.** 120. **20.** 576. **21.** 332640.

22. $\frac{25!\,24!}{8!}$. **23.** 3600. **24.** 2903040. **25.** 348480.

26. 12. **27.** $(n-2)\,\lfloor n-1$ **28.** (i) 60; (ii) 5040; (iii) $\frac{10!}{2!^2}$;

(iv) $\frac{9!}{2!^3}$; (v) $\frac{14!}{2!^2 3!}$; (vi) 4989600; (vii) 83160;

(viii) $\frac{12!}{2!^2}$, **29.** 1260. **32.** $\frac{39!}{5!\,4!^3\,6!^3}$, **33.** $\frac{24!}{(3!)^3.(2!)^5}$.

34. 2519. **35.** 900 ; 660. **36.** 4.

Sec. B. সমবায়

7·7. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা নির্ণয়। (r ⩽ n)

[*To find the number of combinations of n dissimilar things taken r at a time* ($r \leqslant n$).]

মনে কর, নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা x. এই x-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক বস্তু আছে এবং এই এক-একটি সমবায়ের সকল বস্তু লইয়া যদি সম্ভাব্য বিভিন্ন সকল প্রকারে বিন্যস্ত করা যায়, তবে একটি সমবায় হইতেই $\lfloor r$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

∴ x-সংখ্যক সমবায় হইতে সর্বসমেত $x \times \lfloor r$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

এখন, x-সংখ্যক সমবায়গুলির প্রত্যেকটির অন্তর্গত r-সংখ্যক বস্তুগুলি সম্ভাব্য

সকল প্রকারে বিন্যস্ত করিলে, n-সংখ্যক বস্তুগুলি হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়, তাহার সমান হইবে।

$$\therefore \quad x \times \underline{|r} = {}^nP_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}} \quad [\text{§ } 7 \cdot 3 \text{ (একাদশ শ্রেণী)}]$$

$$\therefore \quad x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}.$$

এক্ষণে, n-সংখ্যক বস্তু হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা যদি ${}^nC_r$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা যায়, তবে আমরা লিখিতে পারি

$${}^nC_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}},$$

দ্রষ্টব্য। কোন কোন বীজগণিতে, $\underline{|0}$, ${}^nC_0$, ${}^nP_0$ এই প্রতীকগুলি ব্যবহৃত হয়। ভুল পদ্ধতিতে প্রমাণ করা হয় ইহাদের মান 1 ; সংজ্ঞা অনুসারে **$\underline{|0}$, ${}^nC_0$, P_0 প্রতীকগুলির কোন মানে হয় না।**

বিকল্প প্রমাণ : (বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্য না লইয়া) মনে কর, n-সংখ্যক বস্তুগুলি a, b, c, d,.... প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষর এবং ইহাদের মধ্য হইতে একযোগে r-সংখ্যক অক্ষর লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা ${}^nC_r$.

এই সকল সমবায়ের যতগুলিতে 'a' অক্ষরটি আছে, তাহা স্থির করিতে হইলে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে একযোগে $(r-1)$-সংখ্যক অক্ষর লইয়া সমবায় গঠন করিয়া প্রত্যেকটির সহিত 'a' যুক্ত করিতে হয়।

$\therefore$ যে সকল সমবায়ে 'a' অক্ষরটি আছে তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}C_{r-1}$.

অনুরূপভাবে, যে সকল সমবায়ে 'b' অক্ষর আছে তাহাদের সংখ্যা ${}^{n-1}C_{r-1}$ এবং n-সংখ্যক অক্ষরগুলির প্রত্যেকটির ক্ষেত্রেই ইহা প্রযোজ্য।

$\therefore$ n-সংখ্যক অক্ষর হইতে r-সংখ্যক অক্ষর একযোগে লইয়া গঠিত সমবায়গুলি যদি লেখা যায়, তবে n-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি ঐ সমবায়গুলির মধ্যে ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ এই সমবায়গুলিতে লিখিত অক্ষর-সংখ্যা $= n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

কিন্তু ইহা সুস্পষ্ট যে, নির্ণেয় ${}^nC_r$ সমবায়গুলির প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক অক্ষর থাকায় মোট অক্ষর-সংখ্যা $= r \times {}^nC_r$.

$$\therefore \quad r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1},$$

$$\text{বা,} \qquad {}^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}.$$

অনুরূপভাবে, $^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2}$.

$$^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3}.$$

$$\cdots\quad \cdots\quad \cdots\quad \cdots$$

$$^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1$$

সহজেই আমরা পাই, $^{n-r+1}C_1 = \frac{n-r+1}{1}$.

এক্ষণে, উভয় পক্ষের রাশিগুলি পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিলে লব্ধ গুণফল দুইটি সমান হইবে এবং উভয় গুণফল হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি অপসারিত করিয়া আমরা পাই,

$$^{n}C^{r} = \frac{n}{r} \times \frac{n-1}{r-1} \times \frac{n-2}{r-2} \times \cdots\cdots \times \frac{n-r+2}{2} \times \frac{n-r+1}{1},$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r.(r-1)(r-2)\cdots\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1).\underline{|n-r}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}.$$

7·8. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত যে সমবায়গুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু (i) সতত বর্তমান এবং (ii) সতত অবর্তমান তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of combinations of n things taken r at a time, in which p particular things always (i) occur and (ii) do not occur.*]

(i) প্রথমেই n-সংখ্যক বস্তু হইতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখ। তারপর অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-p)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় গঠন কর। এই লব্ধ সমবায়গুলির প্রত্যেকটির সহিত পৃথকীকৃত p-সংখ্যক বস্তু সংযুক্ত করিলে r-সংখ্যক বস্তু-সমন্বিত যে সকল সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত বর্তমান তাহা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_{r-p}$.

(ii) আবার, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত যে সকল সমবায়ে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সতত অবর্তমান, তাহা স্থির করিতে হইলে প্রথমেই n-সংখ্যক বস্তু হইতে ঐ p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সরাইয়া রাখ। তাহা হইলে অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু অবর্তমান। এখন এই $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়গুলির কোনটিতেও p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু থাকিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$.

7·9. পূরক সমবায়। [*Complementary Combinations*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে (n - r)-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা পরস্পর সমান।

[*The number of combinations of n things taken r at a time is equal to the number of combinations of n things taken (n - r) at a time.*]

n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় গঠন করিতে যতবার r-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যায়, ততবার বাকী $(n-r)$-সংখ্যক বস্তুর একটি ভাগ (group) পড়িয়া থাকে, অর্থাৎ n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা n-সংখ্যক বস্তু হইতে $(n-r)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যার সমান।

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

এই লব্ধ ফল শিক্ষার্থিগণের মনে রাখা প্রয়োজন, যেহেতু ইহার সাহায্যে কোন প্রশ্নের সংখ্যা-সংক্রান্ত গণনাকার্য সংক্ষেপে করা যায়।

বিকল্প প্রমাণ : § 7·7 (একাদশ শ্রেণী) অনুসারে,

$$^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \cdot \lfloor n-r},$$

আবার, $$^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \, \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \, \lfloor r}.$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। উপরোক্ত আলোচনা হইতে স্পষ্টই দেখা যায়, যদি $^nC_r = {^nC_s}$ হয়,

তবে $r = s$ অথবা $r = n - s$ অর্থাৎ $r + s = n$.

Ex. 1. *Out of 15 players in how many ways can a team of eleven be chosen ?*

দলগঠনের নির্ণেয় সংখ্যা $= {^{15}C_{11}} = {^{15}C_{15-11}} = {^{15}C_4}$.

$$= \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4} = 1365.$$

$^{15}C_{11}$ দ্বারা নির্দেশিত সংখ্যা নিরূপণ করিতে হইলে পনরটি উৎপাদক-সম্বলিত লব ও হর যুক্ত একটি ভগ্নাংশ সরল করা প্রয়োজন হইত।

Ex. 2. প্রমাণ কর: $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$.

এক্ষণে, $^nC_r + {^nC_{r-1}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}} + \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r+1}}$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} \cdot \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r}} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\underline{|n} \times (n+1)}{\underline{|r-1}\ \underline{|n-r} \times r(n-r+1)}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r+1}} = {^{n+1}C_r}.$$

[$\because$ $\underline{|n} \times (n+1) = \underline{|n+1}$, $\underline{|r-1} \times r = \underline{|r}$

এবং $\underline{|n-r} \times (n-r+1) = \underline{|n-r+1}$.]

বিকল্প পদ্ধতি: $(n+1)$ সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত মোট সমবায়কে দুইভাগে ভাগকরা যায় (i) উক্ত বস্তুর কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু যতগুলি সমবায়ে আছে এবং (ii) ঐ নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি যতগুলি সমবায়ে নাই। এখন নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে আছে তাহাদের সংখ্যা, অবশিষ্ট n বস্তু হইতে $(r-1)$ বস্তু লইয়া যতগুলি সমবায় হয় উহার সংখ্যার সমান *i.e.* $^nC_{r-1}$; আবার ঐ নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি যে সকল সমবায়ে নাই

তাহাদের সংখ্যা n বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তুটি লইয়া যতগুলি সমবায় উহার সংখ্যার সমান *i.e.* ${}^nC_r$.

$$\therefore \quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$$

7·10. ${}^nC_r$-এর চরম মান। [*Greatest value of* ${}^nC_r$.]

r-এর মান কত হইলে ${}^nC_r$-এর মান চরম হইবে।

[*To find for what value of r, for a given value of n, the value of* ${}^nC_r$ *is greatest.*]

আমরা জানি $\quad {}^nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1).r}$

এবং $\quad {}^nC_{r-1} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+3)(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-2)(r-1)}$;

$$\therefore \quad {}^nC_r = {}^nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}. \quad \therefore \quad \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}.$$

গুণনকারী উৎপাদক $\dfrac{n-r+1}{r}$ অর্থাৎ $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)$ হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, r এর মান যখন 1 হইতে n পর্যন্ত (মাত্র অখণ্ড ধনসংখ্যাগুলির মধ্য দিয়া) বর্ধিত হয়, তখন $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)$ এর মান হ্রাসপ্রাপ্ত হইতে থাকে। লক্ষ্য কর, কিছুক্ষণ r এর একটি নির্দিষ্ট (n, নির্ভর) মান পর্যন্ত গুণনকারী উৎপাদকটি 1 এর অপেক্ষা বৃহত্তর থাকিবে অর্থাৎ ${}^nC_r > {}^nC_{r-1}$, এবং সেই মানের পর $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)$, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ তখন ${}^nC_r < {}^nC_{r-1}$ হইবে।

সুতরাং, r এর মানবৃদ্ধির সহিত যতক্ষণ $\dfrac{n-r+1}{r}$ এর মান 1 অপেক্ষা বেশী থাকে ততক্ষণ ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$,.... ${}^nC_n$ শ্রেণীটির পদগুলি ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে এবং তারপর r এর মানবৃদ্ধিহেতু $\dfrac{n-r+1}{r}$ এর মান যখন 1 অপেক্ষা কম হয়, তখন এই শ্রেণীর পদগুলির মান ক্রমশঃ হ্রাস পাইতে থাকে।

$\therefore$ যখন $\dfrac{n-r+1}{r}$ এর মান ঠিক 1 অথবা 1 অপেক্ষা কিঞ্চিৎ বেশী হয় তখন ${}^nC_r$ এর মান আর বৃদ্ধি না পাইয়া চরম মানে উপনীত হয়।

অর্থাৎ ^nC_r এর মান চরম হয়, যখন $\frac{n-r+1}{r}$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=1$ হয়,

অর্থাৎ, $n-r+1$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=r$ হয়,

অর্থাৎ, $n+1$ কিঞ্চিৎ $>$ বা ঠিক $=2r$ হয়,

অর্থাৎ r কিঞ্চিৎ $<$ বা ঠিক $=\frac{n+1}{2}$ হয়।

এখন, প্রাপ্ত এই শর্তের সহিত সামঞ্জস্য রাখিয়া r এর বৃহত্তম মান নির্ণয় করিতে হইবে।

(i) এখন, মনে কর n একটি যুগ্ম রাশি $2m$ এর সমান।

তাহা হইলে $\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 1 হইতে m পর্যন্ত r এর সকল মানের ক্ষেত্রে $\frac{n+1}{2}>r$.

$\therefore$ $r=m=\frac{n}{2}$ ধরিলে আমরা ^nC_r এর চরম মান পাই $^nC_{\frac{n}{2}}$.

(ii) আবার, n একটি অযুগ্ম রাশি $2m+1$ হইলে $\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1$,

সুতরাং, 1 হইতে m পর্যন্ত r এর সকল মানের ক্ষেত্রে $\frac{n+1}{2}>r$. কিন্তু,

$r=m+1$ হইলে, $\frac{n-r+1}{r}=1$ হয়।

এবং তখন $^nC_{m+1}={}^nC_m$ হয়, অর্থাৎ $^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ হয়।

$\therefore$ এক্ষেত্রে অর্থাৎ n একটি অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, r যখন $\frac{n+1}{2}$ বা $\frac{n-1}{2}$ হইবে তখন ^nC_r এর মান চরম হইবে।

$\therefore$ ^nC_r এর চরম মান $^nC_{\frac{n+1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n-1}{2}}$.

এখানে লক্ষণীয় যে, $n-\frac{n+1}{2}=\frac{n-1}{2}$ বলিয়া, $^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}}$,

যেহেতু $^nC_r={}^nC_{n-r}$.

7·11. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *In a certain class there are 10 boys. How many different groups can be made out of them when each group contains 6 boys ?*

10 জন বালক হইতে 6 জন করিয়া বিভিন্ন দল গঠন করিতে হইবে। অতএব, নির্ণেয় দল-সংখ্যা

$$= {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}$$

$$= 10 \times 3 \times 7$$

$$= 210.$$

Ex. 2. *Prove that* ${}^{2n}C_n = \dfrac{2^n.1.3.5.7....(2n-1)}{\lfloor n}$.

এক্ষণে, $${}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n} = \frac{1.2.3.4....(2n-2)(2n-1).2n}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{2.4.6.8....(2n-2).2n.1.3.5.7....(2n-1)}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{2^n(1.2.3....n).1.3.5.7....(2n-1)}{\lfloor n \lfloor n}$$

$$= \frac{2^n.1.3.5....(2n-1)}{\lfloor n}.$$

Ex. 3. *Out of the letters of the word* dangerously *how many words can be formed each containing 3 consonants and 2 vowels ?*

প্রদত্ত শব্দটিতে consonant-এর সংখ্যা 7 এবং vowel-এর সংখ্যা 4. এখন, 7টি consonant হইতে 3টি এবং 4টি vowel হইতে 2টি অক্ষর নির্বাচনের বিভিন্ন উপায় যথাক্রমে ${}^7C_3$ এবং ${}^4C_2$.

আবার, ${}^7C_3$-সংখ্যক consonant নির্বাচনের প্রত্যেক উপায়ের সহিত ${}^4C_2$-সংখ্যক vowel নির্বাচনের প্রত্যেক উপায় যুক্ত করা যায় বলিয়া vowel এবং consonant নির্বাচনের মোট উপায় $= {}^7C_3 \times {}^4C_2$.

এইরূপে নির্বাচিত 5টি বিভিন্ন অক্ষরযুক্ত প্রত্যেকটি শব্দ আবার নিজেদের মধ্যে $\underline{|5}$ রকম উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^7C_3 \times {}^4C_2 \times \underline{|5} = \dfrac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}} \times \dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2} \times \underline{|2}} \times \underline{|5}$

$$= 5 \times \underline{|7} = 25200.$$

Ex. 4. *Find the number of triangles which can be formed by joining three angular points of a polygon of 15 sides (quindecagon) and the number of its diagonals.*

এই পঞ্চদশভুজের যে-কোন তিনটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিলে এক-একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং পঞ্চদশভুজের শীর্ষবিন্দু-সংখ্যা 15.

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা $= {}^{15}C_3 = \dfrac{15.14.13}{1.2.3} = 455.$

আবার, এই পঞ্চদশভুজের দুইটি দুইটি করিয়া শীর্ষবিন্দু যুক্ত করিয়া প্রাপ্ত সরল রেখার সংখ্যা

$$= {}^{15}C_2 = \frac{15.14}{1.2} = 105.$$

কিন্তু এই সংখ্যার মধ্যে পঞ্চদশভুজের 15টি বাহুও অন্তর্ভুক্ত।

$\therefore$ পঞ্চদশভুজের কর্ণের নির্ণেয় সংখ্যা $= 105 - 15 = 90.$

Ex. 5. *In how many ways can a committee of 5 persons of whom 2 must be Bengalees, 2 must be Assamese and 1 a Bihari, be chosen from a group of 4 persons of each province ?*

এই স্থলে প্রদত্ত শর্তানুযায়ী কমিটি গঠন করিতে হইলে 4 জন বাঙ্গালীর মধ্য হইতে 2 জন, 4 জন অসমীয়ার মধ্য হইতে 2 জন এবং 4 জন বিহারীর মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিতে হইবে।

4 জন বাঙ্গালীর মধ্য হইতে 2 জনের নির্বাচন ${}^4C_2$ রকমে, 4 জন অসমীয়ার মধ্য হইতে 2 জনের নির্বাচন ${}^4C_2$ রকম এবং 4 জন বিহারীর মধ্য হইতে 1 জনের নির্বাচন ${}^4C_1$ রকমে করা যায়।

নির্ণেয় কমিটি-সংখ্যা $= {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^4C_1 = \dfrac{4.3}{1.2} \times \dfrac{4.3}{1.2} \times \dfrac{4}{1}$

$$= 6 \times 6 \times 4 = 144.$$

Ex. 6. *Find in how many ways a selection of 5 out of 10 things can be made when* (i) *one particular thing is always included, and* (ii) *one particular thing is always excluded.*

(i) প্রত্যেক নির্বাচনে একটি নির্দিষ্ট বস্তু লইতে হইলে, 10টি বস্তুর মধ্য হইতে পূর্বেই সেইটিকে লইয়া অবশিষ্ট 9টি বস্তু হইতে 4টি নির্বাচন করিতে হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^9C_4 = \dfrac{9.8.7.6}{1.2.3.4} = 126.$

(ii) প্রত্যেক নির্বাচনে যদি কোন এক নির্দিষ্ট বস্তু না থাকে, তবে প্রথমেই সেই বস্তুটি সরাইয়া রাখিয়া অবশিষ্ট 9টি বস্তু হইতে 5টি নির্বাচন করিতে হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^9C_5 = \dfrac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126.$

Ex. 7. *A cricket team of eleven has got to be selected from 13 players of whom only 4 can bowl ; in how many ways can the team be formed so as to include at least two bowlers ?*

11 জন খেলোয়াড় লইয়া গঠিত দলটিতে অন্ততঃ 2 জন bowler থাকিবে বলিয়া খেলোয়াড়দের যে-কোন এক নির্বাচনে 2, 3 অথবা 4 জন bowler থাকিতে পারে।

$\therefore$ bowler নির্বাচন ${}^4C_2$, ${}^4C_3$ এবং ${}^4C_4$ রকমে করা যায়। এখন, 2 জন bowler নির্বাচিত হইলে, 11 জনের দলগঠনে bowler বাদে অবশিষ্ট 9 জনকে লইতে হইবে এবং এই নির্বাচন ${}^9C_9$ রকমে সম্পন্ন করা যায়।

$\therefore$ 2 জন bowler লইয়া দলগঠন ${}^4C_2 \times {}^9C_9$ রকমে করা যায়।

3 জন bowler নির্বাচন হইলে, bowler বাদে অবশিষ্ট 9 জনের মধ্য হইতে 11 জনের দলগঠনে 8 জন নির্বাচন করিতে হইবে এবং ইহা ${}^9C_8$ রকমে করা যায়।

$\therefore$ 3 জন bowler লইয়া খেলোয়াড় দল ${}^4C_3 \times {}^9C_8$ রকমে গঠন করা যায়। আবার, গঠিত দলে 4 জন bowler থাকিলে, দলগুলি ${}^4C_4 \times {}^9C_7$ রকমে গঠন করা যায়।

∴ দলগুলি বিভিন্ন রকমে গঠনের নির্ণেয় নির্বাচন-সংখ্যা

$$={}^{4}C_2\times{}^{9}C_9+{}^{4}C_3\times{}^{9}C_8+{}^{4}C_4\times{}^{9}C_7$$

$$=\frac{4.3}{1.2}\times 1+4\times 9+1\times\frac{9.8}{1.2}$$

$$=6+36+36=78.$$

Ex. 8. *In how many different ways can* 3 *prizes, one of Rs.* 20, *one of Rs.* 15, *and one of Rs.* 10, *be allotted to three boys out of a class of* 20 *? If the prizes were of equal value, Rs.* 15 *each, in how many ways could they be awarded ?*

20 জন বালকের মধ্যে পুরস্কারলাভের যোগ্য বালক ${}^{20}C_3$ রকমে নির্বাচন করা যায়। এবং নির্বাচিত 3 জন বালকের এক এক প্রস্থকে বিভিন্ন মূল্যের 3টি পুরস্কার ${}^{3}P_3$ রকমে দেওয়া যায়।

∴ বালকদের মধ্যে ভিন্ন ভিন্ন রকমে পুরস্কার বিতরণের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$={}^{20}C_3\times{}^{3}P_3=\frac{20.19.18}{1.2.3}\times\lfloor 3=6840.$$

কিন্তু পুরস্কারগুলি যদি সমমূল্য হয়, তবে এক প্রস্থ নির্বাচিত বালকদের মাত্র এক প্রকারেই 3টি পুরস্কার দেওয়া যাইবে।

∴ এক্ষেত্রে বিভিন্ন উপায়ে পুরস্কার বিতরণের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$={}^{20}C_3=\frac{20.19.18}{1.2.3}=1140.$$

Ex. 9. *Find the number of ways in which* (*i*) *a selection,* (*ii*) *an arrangement of* 4 *letters can be made from the letters of the word* assassination.

Assassination শব্দটিতে 6 প্রকারের 13টি অক্ষর আছে—4টি s, 3টি a, 2টি i, 2টি n এবং o, t একটি করিয়া।

এই অক্ষরগুলি হইতে 4টি করিয়া লইয়া নির্বাচন করিতে হইলে নিম্নলিখিত প্রকারে নির্বাচন করা যায়

(1) চারিটি অক্ষর একপ্রকার।

(2) তিনটি অক্ষর একপ্রকার এবং একটি ভিন্নপ্রকার।

(3) দুইটি একপ্রকার এবং অপর দুইটি অন্য একপ্রকার।

(4) দুইটি একপ্রকার এবং অপর দুইটি ভিন্ন ভিন্ন প্রকার।

(5) চারিটি অক্ষর বিভিন্ন প্রকার।

(1) এই ক্ষেত্রে চারিটি s লইয়া মাত্র একটি নির্বাচন হইতে পারে।

(2) এই ক্ষেত্রে চারিটি 's' হইতে তিনটি এবং তিনটি 'a' হইতে তিনটি দুইপ্রকারে লওয়া যায়। অবশিষ্ট 5 প্রকার বিভিন্ন অক্ষর হইতে একটি লইয়া ঐ দুইপ্রকার নির্বাচনের সহিত যুক্ত করিলে 4 অক্ষরের নির্বাচন পাওয়া যায়।

∴ এই নির্বাচন-সংখ্যা $= 2 \times 5$ বা 10.

(3) এই ক্ষেত্রে চারিপ্রকার অক্ষর a, s, i, n দুইটি করিয়া আছে। (এখানে যদিও s চারিটি এবং a তিনটি আছে তবুও আমাদের দুইটি করিয়া লইতে হইবে বলিয়া a ও s দুইটি করিয়া বলা হইল)। এখন আমাদের এই 4 জোড়া অক্ষরের 2 জোড়া নির্বাচন করিতে হইবে এবং তাহা $^4C_2$ বা 6 রকমে করা যায়।

∴ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 6$.

(4) ঐই নির্বাচন 4×10 প্রকারে করা যায়; প্রথমে 4 জোড়া অক্ষরের মধ্যে একটি $^4C_1$ বা 4 প্রকারে নির্বাচন করিয়া আর দুইটি অক্ষর অবশিষ্ট 5 প্রকার অক্ষর হইতে $^5C_2$ বা 10 প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

∴ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 4 \times 10 = 40$.

(5) এই প্রকার নির্বাচন $^6C_4$ বা 15 প্রকারে করা যায়। কেননা আমাদের 6 প্রকার অক্ষর a, s, i, n, o, t হইতে 4টি বিভিন্ন অক্ষর নির্বাচন করিতে হইবে।

∴ এইপ্রকার নির্বাচন-সংখ্যা $= 15$.

∴ মোট নির্বাচন-সংখ্যা $= 1 + 10 + 6 + 40 + 15 = 72$.

(ii) আবার, মোট বিন্যাস-সংখ্যা স্থির করিতে হইলে উপরের (1) হইতে (5) পর্যন্ত সকল শ্রেণীর অন্তর্গত প্রত্যেকটি নির্বাচনের 4টি অক্ষর সম্ভাব্য সকল প্রকারে বিন্যস্ত করিতে হইবে।

∴ (1) হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 1$, [illegible]তু চারিটি অক্ষর একই প্রকার;

(2) হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 10 \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 40$;

(3) হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 6 \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 36$;

(4) হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 40 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 480$;

এবং (5) হইতে বিন্যাস-সংখ্যা $= 15 \times \lfloor 4 = 360$.

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= 1 + 40 + 36 + 480 + 360 = 917$.

Ex. 10. *A railway carriage will accommodate* 5 *passengers on each side ; in how many ways can* 10 *persons take their seats when two of them decline to face the engine, and a third cannot travel with his back towards the engine ?*

মনে কর, গাড়ীর মধ্যে দুইখানি বেঞ্চ P ও Q. P বেঞ্চে উপবিষ্ট যাত্রীরা ইঞ্জিনমুখো হইয়া এবং Q বেঞ্চে উপবিষ্ট যাত্রীরা ইঞ্জিনের দিকে পেছন ফিরিয়া উপবেশন করে। মনে কর, 10 জন যাত্রীর মধ্যে A, B নামক দুইজন যাত্রী ইঞ্জিনমুখো হইয়া গাড়ীতে উপবেশন করিতে অসম্মতি জানায় এবং C নামক অপর এক যাত্রী ইঞ্জিনের দিকে পেছন ফিরিয়া গাড়ীতে ভ্রমণ করিতে পারে না।

$\therefore$ A, B নামক যাত্রিদ্বয় Q বেঞ্চে এবং C নামক যাত্রী P বেঞ্চে আসন গ্রহণ করিবে।

এখন, P বেঞ্চে বসিবার জন্য অবশিষ্ট 7 জন যাত্রীর মধ্যে 4 জন এবং Q বেঞ্চে বসিবার জন্য 3 জন নির্বাচন করিতে হইবে।

P বেঞ্চের জন্য 7 জন যাত্রীর মধ্যে 4 জন যে-কোন একপ্রকারে নির্বাচন করার সঙ্গে সঙ্গে Q বেঞ্চের জন্য অবশিষ্ট 3 জনের নির্বাচন সম্পন্ন হইবে।

$\therefore$ P, Q বেঞ্চ দুইটির জন্য বিভিন্ন প্রকার নির্বাচন-সংখ্যা সমান এবং দুই বেঞ্চের জন্য নির্বাচন যুগপৎ সম্পন্ন হয় বলিয়া যে-কোন এক নির্বাচনে দুই বেঞ্চের নির্বাচন একটিমাত্র ধরা যাইতে পারে। এই নির্বাচন-সংখ্যা স্পষ্টতঃই $^7C_4$.

এখন, যে-কোন একপ্রকার এইরূপ নির্বাচনে প্রত্যেক বেঞ্চে উপবিষ্ট 5 জন যাত্রীকে তাহাদের মধ্যে $\lfloor 5$ প্রকারে সাজানো যায়।

যেহেতু, P বেঞ্চে যাত্রীর উপবেশনের প্রত্যেক প্রকারের সহিত Q বেঞ্চে যাত্রীর উপবেশনের প্রত্যেক প্রকার যুক্ত করা যায় বলিয়া দুই বেঞ্চে যাত্রীরা মোট $\lfloor 5 \times \lfloor 5$ প্রকারে বসিতে পারে এবং ইহা একপ্রকার নির্বাচনের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

কিন্তু এই নির্বাচনের মোট সংখ্যা $= {}^7C_4$.

$\therefore$ দুইটি বেঞ্চে 10 জন যাত্রীর বিভিন্ন প্রকারে উপবেশন করিবার মোট সংখ্যা

$$= {}^{7}C_{4} \times \underline{|5} \times \underline{|5} = \frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}} \times \underline{|5} \times \underline{|5} = \underline{|7} \times 5 \times 5.4$$

$$= 504000.$$

Ex. 11. *Eight Indians and six Europeans are candidates for six vacancies in an office of which three must be held by Indians, two by Europeans and the remaining one by either an Indian or a European. In how many ways can they be filled in ?*

অফিসের 6টি শূন্যপদে নিয়োগের জন্য 8 জন ভারতীয়দের মধ্য হইতে 3 জন ${}^{8}C_{3}$ প্রকারে এবং 6 জন ইউরোপীদের মধ্য হইতে 2 জন ${}^{6}C_{2}$ প্রকারে নির্বাচন করা যায়।

এখন, প্রত্যেক প্রকার ভারতীয় নির্বাচনের সহিত প্রত্যেক প্রকার ইউরোপীয় নির্বাচন যুক্ত করা যায় বলিয়া 5টি শূন্যপদ পূরণের জন্য এই দুই নির্বাচন অর্থাৎ ভারতীয় নির্বাচন ও ইউরোপীয় নির্বাচন ${}^{8}C_{3} \times {}^{6}C_{2}$ প্রকারে করা যায়।

বাকি শূন্যপদটি অবশিষ্ট 5 জন ভারতীয়দের মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিয়া ${}^{5}C_{1}$ প্রকার অথবা অবশিষ্ট 4 জন ইউরোপীয়দের মধ্য হইতে 1 জন নির্বাচন করিয়া ${}^{4}C_{1}$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ এই শেষোক্ত শূন্যপদটি $({}^{5}C_{1} + {}^{4}C_{1})$ প্রকারে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ শূন্যপদ ছয়টি পূরণ করিবার মোট উপায়ের সংখ্যা

$$= {}^{8}C_{3} \times {}^{6}C_{2} \times ({}^{5}C_{1} + {}^{4}C_{1})$$

$$= \frac{8.7.6}{1.2.3} \times \frac{6.5}{1.2} \times (5+4)$$

$$= 56 \times 15 \times 9 = \text{[illegible]}560.$$

Ex. 12. *Find the number of different straight lines that can be obtained by joining n different points, no three of which are collinear, excepting p points which are collinear. Find also the number of triangles formed by joining them.*

প্রদত্ত n-সংখ্যক সকল বিন্দুই যদি এরূপ হইত যে, তাহাদের মধ্যে কোন তিনটি সমরেখীয় নয়, তাহা হইলে বিন্দুগুলি পরস্পর যুক্ত করিলে লব্ধ সরলরেখার সংখ্যা হইত ${}^nC_2$.

কিন্তু p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখীয় হওয়ায় তাহাদিগকে পরস্পর যুক্ত করিয়া ${}^pC_2$-সংখ্যক সরলরেখার পরিবর্তে একটিমাত্র সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি পরস্পর যুক্ত করিয়া লব্ধ সরলরেখার সংখ্যা

$$={}^nC_2-{}^pC_2+1=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}+1.$$

আবার, n-সংখ্যক বিন্দুর কোন তিনটিই সমরেখীয় না হইলে তিনটি তিনটি করিয়া বিন্দুগুলি যুক্ত করিলে লব্ধ মোট ত্রিভুজ-সংখ্যা হইত ${}^nC_3$. কিন্তু p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখীয় হওয়ায় এই বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া ${}^pC_3$-সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে না।

∴ প্রদত্ত বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া লব্ধ ত্রিভুজের নির্ণেয় সংখ্যা

$$={}^nC_3-{}^pC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{p(p-1)(p-2)}{6}.$$

Ex. 13. *A candidate is asked to answer* 8 *questions from two groups each containing* 6 *questions and he is not permitted to attempt more than* 5 *from anyone group. Find in how many ways he can make his choice of answering the questions fully.*

প্রশ্নগুলি প্রতিভাগে ছয়টি করিয়া দুইভাগে বিভক্ত। কোন পরীক্ষার্থী প্রথম ভাগ হইতে 5টি এবং দ্বিতীয় ভাগ হইতে 3টি, অথবা প্রত্যেক ভাগ হইতে 4টি করিয়া অথবা প্রথম ভাগ হইতে 3টি এবং দ্বিতীয় ভাগ হইতে 5টি প্রশ্ন উত্তরের জন্য নির্বাচন করিতে পারে।

∴ প্রশ্ন নির্বাচনের নির্ণেয় মোট সংখ্যা

$$={}^6C_5\times{}^6C_3+{}^6C_4\times{}^6C_4+{}^6C_3\times{}^6C_5$$

$$=6\times\frac{6.5.4}{1.2.3}+\frac{6.5}{1.2}\times\frac{6.5}{1.2}+\frac{6.5.4}{1.2.3}\times6$$

$$=6\times20+15\times15+6\times20$$

$$=120+225+120=465.$$

প্রশ্নমালা VII (B)

1. Find the values of :

(i) $^{10}C_5$; (ii) $^{25}C_{23}$; (iii) $^{20}C_r$ ($r < 15$).

2. If $^nC_5 : {}^{n-1}C_6 = 3 : 1$, find n.

3. If $^{15}C_r = {}^{15}C_{2r-6}$, find $^rC_4$. Explain the double answer.

4. If $^nP_r = 840$ and $^nC_r = 35$, find n and r.

5. If $^nP_r = 120.{}^nC_{n-r}$, find r.

6. If the number of permutations of n things 4 at a time is to the number of combinations of $2n$ things 3 at a time as 22 : 3, find n.

7. If ^nC_r denote the number of combinations of n things r at a time, prove that

$$^{n+2}C_{r+1} = {}^nC_{r+1} + {}^nC_{r-1} + 2.{}^nC_r.$$

8. If $m = {}^nC_2$, prove that $^mC_2 = 3.{}^{n+1}C_4$.

9. Twenty research-scholarships are vacant in an institution. How many batches of men can be chosen out of twenty-five candidates ? How often may any particular candidate be selected ?

10. Find in how many ways can 16 books be selected out of 20 books no two of which are supposed to be the same.

11. How many different selections of five coins can be made from a purse containing a sovereign, a half-sovereign, a crown, a half-crown, a florin, a shilling, a six-pence and a penny ?

12. A father with eight children takes three at a time to the Zoological gardens, as often as he can without taking the same three children more than once. How often will he go, and how often will a child go ?

13. In a boarding house a different set of 5 boarders is appointed in the executive committee every week. If the number of boarders be 12, find how many weeks will elapse before the same set of 5 boarders will be in office again.

14. Suppose 25 clerks are to be appointed out of 28 candidates of whom 4 are Bekaris and the rest are Bengalees. How many different selections can be made so that none of the Behari candidates may be excluded ?

15. In a municipal corporation there are 20 councillors and 8 aldermen. How many committees can be formed consisting of 5 councillors and 3 aldermen ?

16. A certain council consists of a chairman, two vice-chairmen and 12 other members. How many different committees of six can be formed, including always the chairman and only one vice-chairman ?

17. From 8 Indians and 5 Englishmen a committee of 7 is to be formed. In how many ways can this be done, (i) when the committee contains exactly 3 Englishmen, (ii) at least 3 Englishmen ?

18. There are 10 books of which 4 are English, 3 are French and 3 are German. In how many ways could a selection be made so as to include at least one of each language ?

19. Out of 17 consonants and 5 vowels, how many different words can be formed, each consisting of 3 consonants and 2 vowels ?

20. How many different triangles can be formed by joining the angular points of a decagon ? Find also the number of diagonals of the decagon.

21. At an election there are 5 candidates and 3 members are to be elected and a voter is entitled to vote for maximum number to be elected. In how many ways a voter chooses a vote ?

22. From 6 gentlemen and 4 ladies, a committee of 5 is formed. In how many ways can this be done so as to include at least one lady ?

23. In a group of 15 boys there are 7 boy-scouts. In how many ways can 12 boys be selected so as to include (i) exactly 6 boy-scouts (ii) at least 6 boy-scouts ?

24. A cricket team consisting of 11 players is to be selected from 2 groups consisting of 6 and 8 players respectively. In how many ways can the selection be made on the supposition that the group of six shall contribute *no fewer than* 4 players ?

25. (i) Find the number of ways in which p positive signs and n negative signs may be placed in a row so that no two negative signs shall be together. What is the restriction on p ?

(ii) At the Government Budget meeting there were eleven speakers, six for the Government and five for Opposition. In how many ways could the speeches have been made, if a member of the Government always spoke first and the speeches were alternately for the Government and the Opposition ?

26. Find in how many ways a party of 10 men may seat themselves in a railway compartment which accommodates five men on each side.

27. A man has one dozen friends of whom he wishes to invite 3 at a time to dinner on successive evenings as long as he can have different selection each time. For how many evenings it is possible for him to continue these parties, and how often will each of the 12 friends form one of the party ?

28. Show that the number of ways in which $(2n-1)$ white balls and n black balls can be arranged in a row so that no two black balls may be together is

$$\frac{2^n.1.3.5.....(2n-1)}{\lfloor n}.$$

29. A boat's crew consists of 8 oarsmen, of whom 3 can only row on one side and 2 only on the other. In how many ways can the crew be arranged and also the number of ways they can be selected ?

30. How many combinations can be formed of eight counters marked 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 taking them 4 at a time, there being at least one odd and one even counter in each combination ?

31. How many triangles can be formed by joining the angular points of a polygon of n sides and how many diagonals it has ?

32. Out of 15 teachers and 10 students a committee of 5 is to be formed. In how many ways can this be done so as to include at least one teacher in the committee ?

33. Find the number of selections of the letters of the following words taken 4 at a time :

(i) Examination ;

(ii) Alliteration.

34. (*a*) Find for what values of r the following quantities will be greatest

(i) ${}^{10}C_r$; (ii) ${}^{15}C_r$;

(iii) ${}^{2n}C_r$; (iv) ${}^{2n-1}C_r$;

and also the greatest values.

(*b*) Show that the greatest values of (iii) and (iv) bear a ratio 2 : 1.

35. An employer wishes to make up as many different parties as he can out of 16 employees, each party consisting of the same number ; how many should he call at a time ? In how many of these would the same man be found ?

36. How many letters of the word *Subamycin* should be taken to form a group so that the number of different groups may be greatest ? In how many of these will the letter S occur ?

ANSWERS

1. (i) 252; (ii) 300; (iii) $\frac{\lfloor 20}{\lfloor r \lfloor 20-r}$. **2.** 10. **3.** 15, 35.

4. $n=7, r=4$. **5.** 5. **6.** 14. **9.** 53130 : 42504. **10.** 4845.
11. 56. **12.** 56, 21. **13.** 792. **14.** 2024. **15.** 868224.
16. 990. **17.** 700, 1008. **18.** 735. **19.** 81600.
20. 120, 35. **21.** 25. **22.** 246. **23.** (i) 196; (ii) 252.
24. 344. **25.** (i) $\frac{\lfloor p+1}{\lfloor n \lfloor p-n+1}$, $p \geqslant n-1$. (ii) 86400.
26. 3628800. **27.** 220, 55. **29.** 1728, 3. **30.** 68.
31. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \frac{n(n-3)}{2}$. **32.** 52875. **33.** (i) 136. (ii) 160.
34. (i) 5, 252; (ii) 7, 8, 6435; (iii) $n, \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$; (iv) $n, n-1, \frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1 \lfloor n}$.
35. 8, 6435. **36.** 4, 5; 56, 70.

Sec. C. বিন্যাস ও সমবায় সংক্রান্ত বিবিধ জটিল প্রশ্নাবলীর সমাধান

7·12. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিটি বস্তু একবার, দুইবার, তিনবার,… r-সংখ্যকবার পর্যন্ত যতবার ইচ্ছা ততবার লইয়া r-সংখ্যক বস্তু-সম্বলিত বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of n different things taken r at a time when each thing may be repeated once, twice, thrice, ·······up to r times.*]

n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যাস-গঠন এবং n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া শূন্যস্থান পূরণ করা একই ব্যাপার। তবে, বর্তমান ক্ষেত্রে যে-কোন একটি বস্তু ইচ্ছামতো একবার, দুইবার, তিনবার,········r সংখ্যক বার পর্যন্ত যতবার ইচ্ছা লওয়া যায়।

এখন, প্রথম (শূন্য)-স্থান n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে, কেননা প্রথম স্থানে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-কোন একটি স্থাপন করা যায়। প্রথম স্থান যে-কোন একরকমে পূর্ণ হইলে দ্বিতীয় স্থানও n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়, কারণ প্রথম স্থানে স্থাপিত বস্তুটির পুনর্ব্যবহারে কোন প্রতিবন্ধক নাই। সুতরাং, প্রথম দুইটি স্থান $n \times n$ বা n^2-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়। তৃতীয় স্থানও n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায় এবং প্রথম তিনটি স্থান $n \times n \times n$ বা n^3-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে এবং যতগুলি স্থান পূর্ণ হয় n-এর সূচক তাহার সমান লক্ষ্য করিয়া বলা যায় r-সংখ্যক শূন্যস্থান n^r-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \mathbf{n^r}$.

7·13. বৃত্তাকারে স্থাপিত বস্তুসমূহের বিন্যাস-সংখ্যা।

[*Number of permutations of things placed in a circle.*]

বৃত্তাকারে স্থাপিত বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস নির্ণয়কালে বস্তুগুলি কোন বৃত্তে পাশাপাশি স্থাপন করিয়া যে-সকল ভিন্ন ভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায়, তাহাদের মধ্যে যেগুলির আপেক্ষিক অবস্থান একই প্রকার অর্থাৎ সবগুলির অবস্থানক্রম ঘড়ির

কাঁটার সম-দিগ্‌গামী (clockwise) অথবা সবগুলির অবস্থানক্রম ঘড়ির কাঁটার বিপরীত-দিগ্‌গামী (anti-clockwise) সেই বিন্যাসগুলিকে অভিন্ন ধরা হয়।

মনে কর, A, B, C, D, E পাঁচটি অক্ষর দ্বারা সূচিত পাঁচ ব্যক্তি অক্ষর-গুলির ক্রমানুসারে পরস্পর হাত ধরাধরি করিয়া পর পর ঘড়ির কাঁটা যেদিকে চলে সেইভাবে দাঁড়াইল। এখন, তাহারা যদি হাত ধরাধরি অবস্থায় বৃত্তাকারে clockwise বা anti-clockwise যে-কোনদিকে একটু ঘুরিয়া যায়, তবে তাহাদের আপেক্ষিক অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় না বলিয়া তাহাদের বিন্যাসও অভিন্ন থাকে। আবার, এই সকল ব্যক্তি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে যায়, তাহার বিপরীত দিকে A, B, C, D, E এই ক্রমে হাত ধরাধরি করিয়া বৃত্তাকারে দাঁড়ায়, তবে তাহাদের পূর্ব অবস্থানের সহিত তুলনা করিলে দেখা যায় যে, কোন এক ব্যক্তির দুইপার্শ্বে যে দুই ব্যক্তি পূর্বে ছিল এখনও সেই দুই ব্যক্তিই আছে, পার্থক্য এই যে, পূর্বে বামপার্শ্বে অবস্থিত ব্যক্তি এখন দক্ষিণপার্শ্বে আসিয়াছে এবং দক্ষিণপার্শ্বে অবস্থিত ব্যক্তি বামপার্শ্বে গিয়াছে। সুতরাং, এই দুই বিন্যাস বিভিন্ন ধরা হয়।

যদি কতকগুলি বিভিন্ন রঙের ছোট ছোট বল লইয়া একটি মালা তৈরি করা হয়, তবে বলগুলির স্থান অদলবদল করিলে বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। কোন এক ক্ষেত্রে যদি দেখা যায় যে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে বলগুলি সেইক্রমে সাজানো এবং অপর এক ক্ষেত্রে দেখা যায় যে, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে বলগুলি তাহার বিপরীতদিকে একইক্রমে সাজানো, তবে এই দুই বিন্যাস অভিন্ন হইবে, কেননা মালাটিকে উল্টাইয়া ধরিলে দুই বিন্যাসের মধ্যে কোনও পার্থক্য পরিলক্ষিত হয় না।

সুতরাং, বৃত্তাকারে স্থাপিত বস্তুসমূহের বিন্যাস নির্ণয় করিতে হইলে বস্তুগুলির একটিকে নির্দিষ্ট একস্থানে রাখিয়া অবশিষ্টগুলিকে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে স্থাপন করিয়া বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়।

বৃত্তাকারে স্থাপিত n-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of n things placed in a circle.*]

বৃত্তাকারে স্থাপিত n-সংখ্যক বস্তুর একটিকে স্থির রাখিলে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুকে $\underline{|n-1}$-সংখ্যক বিভিন্নপ্রকারে বিন্যাস করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \underline{|\mathbf{n-1}}$.

দ্রষ্টব্য 1. এখানে clockwise এবং anti-clockwise-এ একইক্রমে স্থাপিত বস্তুগুলির দুইটি বিন্যাস পৃথক ধরা হইয়াছে। কিন্তু n-সংখ্যক বিভিন্ন রঙের বলদ্বারা গ্রথিত হারে (necklace) এই দুই বিন্যাস অভিন্ন বলিয়া এক্ষেত্রে বিন্যাস-সংখ্যা $\frac{1}{2}\lfloor n-1$ হইবে। আবার, কোন কোন স্থলে n-সংখ্যক ব্যক্তি কত প্রকারে একটি গোল টেবিলের চারিদিকে বসিতে পারে, তাহা স্থির করিতে হয়। তখন ব্যক্তিগুলির আপেক্ষিক অবস্থানই শুধু বিবেচ্য নয়, টেবিলের কোন্‌স্থানে তাহাদের অবস্থিতি তাহাও বিবেচ্য। সুতরাং, n-সংখ্যক ব্যক্তি একটি গোল টেবিলের পার্শ্বে গোল হইয়া কত প্রকারে বসিতে পারে প্রশ্ন হইলে উত্তর হইবে $\lfloor n$.

দ্রষ্টব্য 2. উপরের n-বস্তুগুলি যদি একসারিতে (in a row) থাকিত তবে তাহাদের সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা হইত $\lfloor n$. আবার, বৃত্তাকারে সজ্জিত n-সংখ্যক বস্তুগুলি লইয়া বিন্যাসসংখ্যা $\lfloor n-1$. এজন্য অনেক পুস্তকেই এই দুইটি বিন্যাসকে আলাদা করিবার জন্য যথাক্রমে রৈখিক বিন্যাস (linear permutation) ও বৃত্তাকার বিন্যাস (circular permutation) বলা হয়। উদাহরণের জন্য Ex. 3, 4, দেখ।

7·14. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তু-সমূহের মোট সমবায়। n-সংখ্যক বস্তু হইতে এক-যোগে একটি, দুইটি, তিনটি,...... n-সংখ্যকটি পর্যন্ত লইয়া মোট সমবায়-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যখন বস্তুগুলির মধ্যে p-সংখ্যক একজাতীয় অভিন্ন বস্তু, q-সংখ্যক ভিন্ন একজাতীয় অভিন্ন বস্তু, r-সংখ্যক অপর একজাতীয় অভিন্ন বস্তু ইত্যাদি বর্তমান।

[*To find the total number of combinations of n things taking any number of them from 1 to n at a time when p of them are alike of one kind, q of them alike of a second kind, r of them alike of a third kind and so on.*]

মনে কর, বস্তুসংখ্যা n. তন্মধ্যে p-সংখ্যক একজাতীয় বস্তু অভিন্ন q-সংখ্যক ভিন্ন একজাতীয় বস্তু অভিন্ন, r-সংখ্যক অপর একজাতীয় বস্তু অভিন্ন ইত্যাদি।

এখন, n-সংখ্যক বস্তু হইতে প্রদত্ত শর্তানুসারে নির্বাচন করিতে হইলে p-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলিকে $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

কারণ, কতকগুলিতে একটি করিয়া, কতকগুলিতে দুইটি করিয়া, কতকগুলিতে তিনটি করিয়া, ...কতকগুলিতে p-সংখ্যক বস্তু থাকিতে পারে এবং কতকগুলিতে এইজাতীয় বস্তুর একটিও না থাকিতে পারে।

অনুরূপভাবে, q-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলি $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

এক্ষণে, $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি যুক্ত করা যায় বলিয়া p-সংখ্যক এবং q-সংখ্যক বস্তু $(p+1)(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

এইরূপে, p-সংখ্যক, q-সংখ্যক, r-সংখ্যক অভিন্ন বস্তুগুলি মোট $(p+1)$ $(q+1)(r+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়।

একজাতীয় আরও অভিন্ন বস্তু থাকিলে অনুরূপ যুক্তিসাহায্যে তাহাদের নির্বাচনের মোট উপায় কত, তাহা স্থির করা যায়। এবং নির্বাচনের বিভিন্ন উপায় নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়, $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$সংখ্যক। এই $(p+1)(q+1)(r+1)$........সংখ্যা দ্বারা নির্দেশিত বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যে নির্বাচনে n-সংখ্যক বস্তুর একটিও লওয়া হয় নাই অর্থাৎ সকলগুলিই পরিত্যক্ত হইয়াছে, তাহাও অন্তর্ভুক্ত বলিয়া

নির্ণেয় **মোট সমবায়-সংখ্যা** $=(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots-1.$

অনুসিদ্ধান্ত। বস্তুগুলি অভিন্ন হইলে $p=q=r\cdots=1$ হইবে। এবং তখন $p+q+r+\cdots=n$ ধরিয়া এই n-সংখ্যক বস্তু হইতে একটি, দুইটি, তিনটি, $\cdots n$-সংখ্যকটি লইয়া গঠিত মোট সমবায়ের সংখ্যা

$$=(1+1)(1+1)(1+1)\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}-1$$

$$=2^n-1.$$

অর্থাৎ, $\quad {}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_{n-1}+{}^nC_n=2^n-1.$

7·15. বিভিন্ন দলে বিভাগ। [Division into Groups] m+n-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সমন্বিত দুইটি দলে কত বিভিন্ন রকমে বিভক্ত করা যায় তাহার সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of ways in which $(m+n)$ things may be divided into two groups of m and n things respectively.*]

$(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে প্রথম ভাগের m-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করিলে সমবায়-সংখ্যা ${}^{m+n}C_m$ হইবে অর্থাৎ প্রথম ভাগ ${}^{m+n}C_m$ রকমে নির্বাচন করিতে পারা যাইবে, এবং প্রথম ভাগের m-সংখ্যক বস্তু যতবার নির্বাচন করা যায়, ততবার দ্বিতীয় ভাগে n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে এবং এই অবশিষ্ট n-সংখ্যক বস্তু লইয়া একটিমাত্র ভাগই গঠিত হইতে পারে। এখন, প্রথম ভাগের প্রত্যেকটির সহিত দ্বিতীয় ভাগ যুক্ত করা যায় বলিয়া নির্ণেয় ভাগ-সংখ্যা

$$= {}^{m+n}C_m \times 1 = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য 1. যদি $m=n$ হয়, তবে উভয় দলই সম-সংখ্যক বস্তুবিশিষ্ট হইবে। সুতরাং, ঐ দল দুইটি পরস্পরের মধ্যে স্থান বদল করিলেও নতুন কোন সমবায় পাওয়া যাইবে না। সুতরাং, যদি $2m$-সংখ্যক বস্তু দুইটি সমান দলে বিভক্ত করা যায়, তবে তাহার সংখ্যা হইবে $\dfrac{\lfloor 2m}{\lfloor 2(\lfloor m)^2}$.

দ্রষ্টব্য 2. উপরোক্ত পদ্ধতির ব্যাপক প্রয়োগ সম্ভব। যদি $m+n+p+q$ বস্তু-সংখ্যা যথাক্রমে m, n, p, q বস্তুবিশিষ্ট চারিটি দলে বিভক্ত করা যায়, তবে তাহার সংখ্যা হইবে,

$$= {}^{m+n+p+q}C_m \times {}^{n+p+q}C_n \times {}^{p+q}C_p \times {}^{q}C_q$$

$$= \frac{\lfloor m+n+p+q}{\lfloor n+p+q \lfloor m} \times \frac{\lfloor n+p+q}{\lfloor p+q \lfloor n} \times \frac{\lfloor p+q}{\lfloor q \times \lfloor p} \times 1 = \frac{\lfloor m+n+p+q}{\lfloor m \lfloor n \lfloor p \lfloor q}$$

যদি $m=n=p=q$ হয়, তবে দল-সংখ্যা হইবে $\dfrac{\lfloor 4m}{\lfloor 4(\lfloor m)^4}$.

7·16. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *In how many ways can 3 prizes, one for good conduct, one for regular attendance and one for general proficiency, be given away to 10 boys?*

এখানে যে-কোন বালক তিনটি পুরস্কারের একটি, দুইটি বা তিনটি, পুরস্কারই পাইতে পারে। ভালো আচরণের পুরস্কারটি 10 জন বালককে 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। আবার, নিয়মিত উপস্থিতির পুরস্কারটি 10 জন বালককে 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। যেহেতু যে বালক ভালো আচরণের জন্য

পুরস্কার পাইয়াছে, তাহার নিয়মিত উপস্থিতির জন্য পুরস্কার পাইবার কোন বাধা নাই, সুতরাং, প্রথম পুরস্কারটি দিবার উপায়ের সহিত দ্বিতীয় পুরস্কারটি দিবার উপায়কে সংযুক্ত করা যায়। অতএব, ঐ দুইটি পুরস্কার $10 \times 10 = 10^2$ উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে। আবার, সাধারণ পারদর্শিতার পুরস্কারটি 10 রকম উপায়ে দেওয়া যাইতে পারে, এবং যে কোন বালক এই পুরস্কারটি পাইতে পারে। সুতরাং, মোট উপায় $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Ex. 2. *How many numbers of not more than 4 digits can be formed with the digits 2, 3, 4. 5 ?*

§ 7·12 অনুসারে যেহেতু একই পুনরাবৃত্তিতে আপত্তি নাই বলিয়া

একটি সংখ্যা-বিশিষ্ট সংখ্যার সংখ্যা হইবে $= 4$

দুইটি " " " " " $= 4^2$

তিনটি " " " " " $= 4^3$

চারিটি " " " " " $= 4^4$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = \frac{4}{3}(4^4 - 1) = 340.$

Ex. 3. *In how many ways can 6 persons form a ring ? Also find the ways in which these persons can be seated at a round table.*

প্রার্থিত বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইলে বৃত্তে এক ব্যক্তির অবস্থান নির্দিষ্ট রাখিয়া অবশিষ্ট 5 ব্যক্তির বিভিন্ন বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \lfloor 5 = 120.$

ঐ ছয়জন ব্যক্তি যদি একটি গোল টেবিলের চারিধারে উপবিষ্ট হন, তবে যেহেতু টেবিলের সহিত তাহাদের আপেক্ষিক অবস্থান বিবেচনা করিতে হইবে, সেহেতু প্রার্থিত বিন্যাস-সংখ্যা $= \lfloor 6 = 720.$

Ex. 4. *In how many ways can 6 boys and 6 girls seat themselves at a round table so that no two girls are together ?*

গোল টেবিলে একজন বালকের অবস্থান স্থির রাখিয়া বালকগুলিকে $\lfloor 5$ বা 120 রকমে বসানো যায়।

এখন, পাশাপাশি উপবিষ্ট 2 জন বালকের মধ্যে 1 জন বালিকা বসাইলে 6 জন বালিকাকে ঐরূপ 6টি স্থানে বসানো যাইবে এবং দুইজন বালিকাও

পাশাপাশি বসিবে না। এই 6 জন বালিকাকে 6টি স্থানে $\underline{|6}$ বা 720 রকমে বসানো যায়। বালক বসিবার একরকম উপায় হইতে বালিকাদের 720 রকম উপায় পাওয়া যায়।

$\therefore$ বিভিন্ন উপায়ের মোট সংখ্যা $= \underline{|5} \times \underline{|6} = 120 \times 720 = 86400.$

Ex. 5. *How many different sums of money can be made up of the following coins : a rupee, a half-rupee, a quarter-rupee, a* 10 *P., a* 5 *P., a* 2 *P., and* 1 *P. ?*

এখানে 7 প্রকারের বিভিন্ন মুদ্রা আছে এবং ইহাদের মধ্য হইতে একপ্রকারের একটি মুদ্রা বা দুইপ্রকারের দুইটি মুদ্রা প্রভৃতি রূপে লওয়া যায়।

$\therefore$ বিভিন্ন প্রকার মুদ্রা-সমন্বয়ে গঠিত ভিন্ন ভিন্ন অর্থ-পরিমাণের নির্ণেয় সংখ্যা

$$= {}^7C_1 + {}^7C_2 + {}^7C_3 + {}^7C_4 + {}^7C_5 + {}^7C_6 + {}^7C_7 = 2^7 - 1 = 127.$$

[§ 7·14 অনুসারে]

Ex. 6. *Find the number of factors of* 12600.

$$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7.$$

প্রদত্ত রাশির উৎপাদকের মধ্যে 3টি 2, 2টি 3, 2টি 5 এবং একটি 7 আছে। এতদ্ব্যতীত এই সকল উৎপাদকের এক বা একাধিক যোগে লব্ধ গুণফলগুলিও ইহার উৎপাদক হইবে। তবে, লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে, একাধিক উৎপাদক লইয়া গুণফল নির্ণয়ে মৌলিক উৎপাদক যতবার করিয়া আছে তাহার অধিক-সংখ্যক বার লওয়া চলিবে না।

$\therefore$ § 7·14 অনুসারে, উৎপাদক-সংখ্যা

$$= (3+1)(2+1)(2+1)(1+1) - 1$$
$$= 4.3.3.2 - 1 = 71.$$

কিন্তু, এই সংখ্যার মধ্যে প্রদত্ত রাশি 12600ও অন্তর্ভুক্ত বলিয়া নির্ণেয় উৎপাদক-সংখ্যা $= 71 - 1 = 70.$

Ex. 7. *Find the sum of all the numbers that can be formed with the digits,* 3 4, 5, 6 *and* 7 *all at a time.*

প্রদত্ত 5টি অঙ্ক লইয়া গঠিত রাশিসমূহের সংখ্যা $= \underline{|5} = 120.$ এখন এই 120টি রাশি একটির নীচে একটি করিয়া লিখিলে 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কক্রমটির

প্রত্যেকটি অঙ্ক একক, দশক, শতক প্রভৃতি প্রত্যেক স্থানে |4 বা 24 বার করিয়া থাকিবে। অর্থাৎ গঠিত রাশিগুলির এককের স্থানে 3 অঙ্কটি 24 বার, 4 অঙ্কটি 24 বার, 5 অঙ্কটি 24 বার, 6 অঙ্কটি 24 বার এবং 7 অঙ্কটি 24 বার থাকিবে।

∴ গঠিত রাশিগুলির এককস্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টি

$$= 3 \times 24 + 4 \times 24 + 5 \times 24 + 6 \times 24 + 7 \times 24$$
$$= 24(3 + 4 + 5 + 6 + 7)$$
$$= 24 \times 25 = 600.$$

অনুরূপভাবে, দশক, শতক, সহস্র এবং অযুত স্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টি প্রত্যেক ক্ষেত্রে $= 600$.

∴ এককস্থানীয় অঙ্কসমূহের সমষ্টির মান $= 600 \times 1$

দশক- " " " " $= 600 \times 10$

শতক- " " " " $= 600 \times 10^2$

সহস্র- " " " " $= 600 \times 10^3$

এবং অযুত- " " " " $= 600 \times 10^4$.

এইসকল মানের সমষ্টি 3, 4, 5, 6, 7 দ্বারা গঠিত 5 অঙ্কবিশিষ্ট রাশিগুলির সমষ্টি।

∴ নির্ণেয় সমষ্টি $= 600 \times (1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4)$

$$= 600 \times (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000)$$
$$= 600 \times 11111 = 6666600.$$

Ex. 8. *Each of three dice, which are all cubes, has its six faces marked with* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *dots, but the dice themselves are of different colours. If the three are cast simultaneously out of a die-box, in how many different ways can they fall?*

In how many ways will two of the dice show the same mark and the third a different one?

মনে কর, ছক-তিনটি সাদা, কালো এবং লাল রংবিশিষ্ট এবং প্রত্যেকটির ছয়টি তল যথাক্রমে 1, 2, 3, 4, 5, 6টি করিয়া বিন্দুদ্বারা চিহ্নিত। এই ছকগুলি একটি আধার হইতে একসঙ্গে নিক্ষেপ করিলে ছক-তিনটি কত বিভিন্নপ্রকারে পড়িতে পারে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

কোন একটি ছক নিক্ষেপ করিলে উহার চিহ্নিত ছয়টি তলের একটি তল উপরে লইয়া পড়িতে পারে বলিয়া প্রতিটি ছক 6 রকমে পড়িতে পারে।

মনে কর, নিক্ষিপ্ত ছক 3টির মধ্যে সাদা ছকটির 1-চিহ্নিত তল উপরিভাগে দৃশ্যমান। এখন সাদা ছক এই একপ্রকারে পড়িলে কালো ছকটি 6 প্রকারে পড়িতে পারে। এখন সাদা ছকটির একপ্রকারে পড়ার সহিত কালো ছকটির 6 প্রকারে পড়া যুক্ত করিলে এই দুইটি ছক বিভিন্ন ছয়টি প্রকারে পড়িতে পারে। কিন্তু সাদা ছকও ছয়প্রকারে পড়িতে পারে। অতএব সাদা ছকের প্রত্যেক প্রকারে পড়ার সহিত কালো ছকের প্রত্যেক প্রকারে পড়া যুক্ত করিলে এই দুইটি ছক মোট 6×6 বা 36 প্রকারে পড়িতে পারে। আবার, এই দুইছকের কোন একপ্রকারে পড়ার সহিত লাল ছকের 6 প্রকারে পড়া যুক্ত করা যায় বলিয়া তিনটি ছক মোট 36×6 বা 216 প্রকারে পড়িতে পারে।

ই ছকের একই চিহ্নযুক্ত তল এবং তৃতীয়টির ভিন্ন চিহ্নযুক্ত তল উপরিভাগে লইয়া ছকতিনটি বিভিন্ন রংয়ের হওয়ায় তিনপ্রকারে পড়িতে পারে; যথা—(1) সাদা কালো একচিহ্নযুক্ত ও লাল ভিন্নচিহ্নযুক্ত, (2) সাদা লাল একচিহ্নযুক্ত ও কালো ভিন্নচিহ্নযুক্ত এবং (3) লাল কালো একচিহ্নযুক্ত এবং সাদা ভিন্ন-চিহ্নযুক্ত।

ধর, এক ক্ষেত্রে সাদা এবং কালো ছক 1-চিহ্নিত তল উপরিভাগে এবং লাল ছক 2-চিহ্নিত তল উপরিভাগে লইয়া পড়িয়াছে। প্রশ্নের শর্তানুসারে সাদা কালো ছকের 1-চিহ্নিত তলের সহিত তৃতীয় লাল ছকের 1-চিহ্নিত তল ব্যতীত অপর পাঁচটি তল যুক্ত করা যায় বলিয়া সাদা কালো ছকের 1-চিহ্নযুক্ত তল তৃতীয় লাল ছকের তলের সহিত 5 প্রকারে পড়িতে পারে। কিন্তু সাদা কালো ছকদুইটি 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6-এর মধ্যে যে-কোন একই চিহ্নিত তল উপরিভাগে লইয়া 6 রকমে পড়িতে পারে। সুতরাং, সাদা কালো ছকের একই চিহ্নিত তলের 6 রকমে পড়ার সহিত লাল ছকের ভিন্ন-চিহ্নিত তলের 5 রকমে পড়া যুক্ত করিলে এইভাবে (সাদা কালো 'ছক একই' চিহ্নযুক্ত এবং লাল ছক ভিন্নচিহ্নযুক্ত) ছকতিনটি 6×5 বা 30 রকমে পড়িতে পারে।

$\therefore$ দুই ছক একই চিহ্নযুক্ত এবং তৃতীয় ছক ভিন্ন-চিহ্নযুক্ত হইয়া 3 প্রকারে পড়িতে পারে বলিয়া ছকতিনটি এইভাবে মোট 30×3 বা 90 রকমে পড়িতে পারে।

Ex. 9. *In how many of the permutations of n different things r at a time will 3 particular things always occur?*

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া আমরা প্রথমে যে-সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তুতিনটি সতত থাকে তাহার সংখ্যা নির্ণয় করিব।

এই n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে নির্দিষ্ট বস্তুতিনটি পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-3)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায় সংখ্যা $= {}^{n-3}C_{r-3}$.

এখন, ${}^{n-3}C_{r-3}$-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির সহিত পৃথকীকৃত বস্তুতিনটি যুক্ত করিলে লব্ধ প্রত্যেকটি সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তুতিনটি সতত থাকিবে এবং বস্তু-সংখ্যাও r হইবে।

$\therefore$ যে সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি সতত থাকে তাহার সংখ্যা $= {}^{n-3}C_{r-3} = \dfrac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\,\underline{|n-r}}$ এবং এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে বস্তু-সংখ্যা $= r$.

$\therefore$ ইহার প্রত্যেকটি সমবায় হইতে $\underline{|r}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \dfrac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\,\underline{|n-r}} \times \underline{|r}$

$$= \frac{\underline{|n-3}}{\underline{|n-r}} \times r(r-1)(r-2).$$

Ex. 10. *In how many ways can n men be arranged in a row so that neither of two specified men is at either extremity of the row?*

মনে কর, n-সংখ্যক ব্যক্তির মধ্যে A, B নির্দিষ্ট ব্যক্তিদ্বয়। এই n-সংখ্যক ব্যক্তিকে একসারিতে অবস্থিত n-সংখ্যক বিন্দুতে এমনভাবে স্থাপন করিতে হইবে যেন নির্দিষ্ট দুই ব্যক্তি A, B ঐ সারির দুই প্রান্তবিন্দুতে অবস্থিত না হয়।

$\therefore$ A, B ব্যক্তিদ্বয়কে দুই প্রান্তবিন্দু ব্যতীত অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুর যে-কোন দুই বিন্দুতে স্থাপন করা যায়।

এখন, A কে $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুতে $(n-2)$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

যে-কোন এক উপায়ে A কে প্রান্তবিন্দুদ্বয় ব্যতীত কোন এক বিন্দুতে স্থাপন করিলে B কে অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বিন্দুতে $(n-3)$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ A, B দুই ব্যক্তিকে মোট $(n-2)(n-3)$-সংখ্যক উপায়ে মধ্যবর্তী $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুতে স্থাপন করা যায়।

আবার, মধ্যবর্তী $(n-2)$-সংখ্যক বিন্দুর যে-কোন দুই বিন্দুতে A, B কে স্থাপন করিলে এই দুই বিন্দু ব্যতীত অবশিষ্ট $(n-2)$-সংখ্যক ব্যক্তিকে $\underline{|n-2}$-সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ A, B সহ n-সংখ্যক ব্যক্তিকে একসারিতে অবস্থিত n-বিন্দুতে সর্বসমেত $(n-2)(n-3)\underline{|n-2}$ সংখ্যক উপায়ে স্থাপন করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $=(n-2)n-3)\underline{|n-2}$.

Ex. 11. *A person has the following coins in his purse : 4 guineas, 5 sovereigns, 2 crowns and 6 shillings. Find in how many ways he can subscribe to a charitable fund.*

এখানে লোকটির নিকট চারজাতীয় বিভিন্ন মুদ্রা আছে। তন্মধ্যে 4টি গিনি একজাতীয়, 5টি সভ্রিন্ অপর একজাতীয়, 2টি ক্রাউন্ ভিন্ন একজাতীয় এবং 6টি শিলিং চতুর্থ একজাতীয়।

$\therefore$ § 7·14 অনুসারে নির্ণেয় সংখ্যা

$$=(4+1)(5+1)(2+1)(6+1)-1$$
$$=5.\ 6.\ 3.\ 7-1=629.$$

Ex. 12. *In how many ways 52 cards can be divided into 4 equal groups? If these 52 cards are distributed among 4 players equally, find the number of ways.*

§ 7·15 অনুসারে 52 খানি তাস সমান চারভাগে ভাগ করিলে প্রত্যেক ভাগে 13 খানি করিয়া তাস থাকে বলিয়া প্রার্থিত বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|52}}{\underline{|4}.\ (\underline{|13})^4}.$$

আবার চারিটি খেলোয়াড়ের মধ্যে ভাগ করিয়া দিলে যেহেতু চারিজন খেলোয়াড় বিভিন্ন লোক হইবে, সুতরাং, এক্ষেত্রে মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|52}}{(\underline{|13})^4}. \qquad [\ § 7·15\ ]$$

Ex. 13. *There are 3n things of which 2n are alike and the rest all different ; find the number of combinations of them 2n at a time.*

$3n$-সংখ্যক বস্তুমধ্যে $2n$-সংখ্যক অভিন্ন এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন। প্রথমেই $2n$-সংখ্যক অভিন্ন বস্তু লইয়া আমরা নির্ণেয় সমবায়গুলির একটি গঠন করিতে পারি। তারপর, আমরা n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে পর পর 1, 2, 3,....n-সংখ্যকটি বস্তু এবং $2n$ সংখ্যা পূরণ করিতে যতগুলি বাকি থাকে ততগুলি বস্তু $2n$-সংখ্যক অভিন্ন বস্তু হইতে গ্রহণ করিয়া $2n$-সংখ্যক বস্তুযুক্ত এক-একটি সমবায় গঠন করিতে পারি এবং এই নির্বাচন যথাক্রমে ${}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3, \cdots\cdots {}^nC_n$ রকমে করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n$.

[§ 7·14 অনুসিদ্ধান্ত]

Examples VII (C)

1. A servant has to post 6 letters and there are 3 letter-boxes in the locality. In how many ways can he post the letters ?

2. A letter-lock consists of three rings each marked with fifteen different letters ; find in how many ways it is possible to make an unsuccessful attempt to open the lock.

3. There are 4 candidates for the presidentship, one is to be elected by the votes of 6 men. In how many ways can the votes be given ?

4. If there be two kinds of balls, red and green, and at least 6 of each kind ; in how many different ways can a ball be put in each of 6 different boxes ?

5. Find in how many ways can 10 children sit in a merry-go-round relatively to one another.

6. In how many ways can 8 persons be seated at a round table so that all shall not have the same neighbour in any two arrangements ?

7. Find in how many ways can 9 different stones be set to form a necklace.

8. Show that the number of different factors of 1062347 is 31.

9. From 3 cocoanuts, 4 apples, and 2 oranges, how many selections of fruits can be made, taking at least one of each kind ?

10. In how many ways 22 people be divided into cricket teams to play against each other in a friendly game ?

11. If ${}^nP_{r-1} : {}^nP_r : {}^nP_{r+1} :: a : b : c$, prove that

$$c = \frac{b}{a}(b-a).$$

12. If ${}^nC_{r-1}/a = {}^nC_r/b = {}^nC_{r+1}/c$, show that

$$\frac{br-an}{ab(n-r)} = \frac{(1-r)}{c(1+r)}$$

Find also the values of n and r in terms of a, b, c.

13. Show that $\dfrac{{}^{2n}C_{2r}}{{}^nC_r} = \dfrac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots(2n-2r+1)}{1.\ 3.\ 5.\ 7\cdots\cdots(2n-1)}$.

14. If P_r denotes the number of permutations of n different things r at a time, show that

$$\frac{P_1}{\lfloor 1} + \frac{P_2}{\lfloor 2} + \frac{P_3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{P_n}{\lfloor n} = 2^n - 1.$$

15. Prove that

$${}^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \{1.\ 3.\ 5.\cdots(4n-1)\} : \{1.3.5\cdots(2n-1)\}^2.$$

16. If C_r denotes the combinations of n different things r at a time, show that

$$1 + C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_n^2 = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.$$

17. Find the sum of all numbers that can be formed with the digits 2, 3, 5, 7, 9.

18. Numbers are formed by using all the digits 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; how many of them are odd and how many even ?

19. How many even numbers each of 7 digits can be formed with the digits 2, 3, 3, 4, 9, 9, 9 ?

20. How many numbers over a million and divisible by 5 can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 ?

21. Find the number of numbers less than 1000 and divisible by 5 which can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 each digit occurring only once in each number.

22. How many numbers can be formed with the digits 9, 8, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 8, 5, 2, 3 taken all together, so that the even digits may always occupy the even places ?

23. How many words can be formed with 4 of the letters of the word *Companies*, so that the letters of each word formed are in alphabetical order ?

24. In how many ways can the letters of the word *Civilization* be re-arranged ?

25. Show that the number of all possible selections of one or more questions from 8 given questions, each having an alternative, is $3^8 - 1$.

26. Six papers are set in an examination, two of them in mathematics ; in how many different orders can the papers be given so that the two mathematical papers are not successive ?

27. If of $(p+q+r)$ things, p be alike of one kind, q be alike of second kind and the rest all different, prove that the total number of combinations is $(p+1)(q+1)2^r - 1$.

28. Find the number of ways in which n different things all at a time can be arranged in which r particular things occur in a given order.

29. There are n letters and n envelopes addressed to n different persons ; how many different ways are there of sending them each to a wrong person ?

30. In a city there are m streets running North and South parallel to one another and n streets East and West also parallel. Find the number of ways in which a man can travel from the

N. W. corner to S. E. corner, going the shortest possible distance.

31. Show that the total number of permutations (with repetitions) of n different things, not more than p at a time is

$$\frac{n(n^p-1)}{n-1}.$$

32. If m parallel straight lines are intersected by n parallel straight lines, show that the number of parallelograms so formed is

$$\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1).$$

33. If there be m sorts of things and n things of each sort, prove that the number of ways in which a selection can be made from them is $(n+1)^m - 1$.

34. A boat consists of $2n$ men, p of whom can row only on one side and q only on the other. In how many ways can the crew be arranged? [Given $p \angle n$, $q < n$]

35. A person appears in an examination in which there are 4 papers with a maximum of m marks for each paper; show that the number of ways in which he may get $2m$ marks on the whole is

$$\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3).$$

ANSWERS

1. 720. **2.** 3374. **3.** 4096. **4.** 64. **5.** 362880. **6.** 2520.

7. 20160. **9.** 315. **10.** 352716.

12. $b(c-a)/b^2-ca$, $r = a(c+b)/b^2-ca$. **17.** 6933264.

18. 2160 odd; 2880 even. **19.** 120. **20.** 1320. **21.** 154.

22. 8400. **23.** 126. **24.** 19958399. **26.** 480. **28.** $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r}$.

29. $\lfloor n\left\{\dfrac{1}{\lfloor 2}-\dfrac{1}{\lfloor 3}+\dfrac{1}{\lfloor 4}-\cdots\cdots \dfrac{(-1)^n}{\lfloor n}\right\}$. **30.** $\dfrac{\lfloor m+n-2}{\lfloor m-1\,\lfloor n-1}$

34 $\dfrac{\lfloor 2n-p-q}{\lfloor n-p\,\lfloor n-q}(\lfloor n)^2$.

অষ্টম অধ্যায়

দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)

8·1. দ্বিপদরাশির যে-কোন ঘাত বীজগণিতীয় যে সূত্রের সাহায্যে একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায় সেই সূত্রটি দ্বিপদ উপপাদ্য নামে অভিহিত। গণিত ও পদার্থবিদ্যাবিদ্ সুবিখ্যাত পণ্ডিত Sir Isaac Newton এই সূত্র আবিষ্কার করিয়াছেন।

এই সূত্র প্রমাণের পূর্ব্বে বিষয়টি সহজবোধ্য করিবার জন্য আমরা এই সম্বন্ধে কিছু আলোচনা করিব।

চারিটি উৎপাদক $x+a$, $x+b$, $x+c$ এবং $x+d$-এর ক্রমিক গুণফল আমরা সাধারণভাবে গুণ করিয়া পাই

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$
$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.$$

পূর্ণ গুণফল কতকগুলি আংশিক গুণফলের সমষ্টি। প্রথমে প্রত্যেক উৎপাদকের এক-একটি পদ অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির এক-একটি পদ লইয়া গুণ করিয়া অভীষ্ট গুণফল নির্ণয় করিতে হয়। এখানে x পদটি প্রত্যেক উৎপাদকে আছে এবং a, b, c, d পদগুলির এক-একটি উৎপাদকে মাত্র একবার করিয়া আছে। এই গুণফল যদি x-এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে সাজানো যায়, তবে x-এর উচ্চতম ঘাত 4 এবং x^4 পদটি পাইতে হইলে প্রত্যেক উৎপাদক হইতে x লইয়া গুণ করিতে হইবে। x^3-সম্বলিত পদগুলি পাইতে হইলে চারিটি উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে তিনটি উৎপাদক হইতে তিনটি x এবং অবশিষ্ট চতুর্থ উৎপাদক হইতে a, b, c, d অক্ষরের মধ্য হইতে একটি লইয়া গুণ করিতে হইবে। x^2-সম্বলিত পদ পাইতে হইলে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে দুইটি উৎপাদকের মধ্য হইতে দুইটি x এবং a, b, c, d অক্ষরচতুষ্টয়ের দুইটি অবশিষ্ট দুইটি উৎপাদক হইতে লইয়া গুণ করিতে হয়। x-সম্বলিত পদসমূহ উৎপাদকগুলির যে-কোন একটি হইতে x এবং a, b, c, d অক্ষরচতুষ্টয়ের যে-কোন তিনটি অবশিষ্ট উৎপাদকগুলির মধ্য হইতে লইয়া গঠিত। এবং x-মুক্ত পদটি a, b, c, d অক্ষরসমূহের গুণফল।

Ex. 1. $(x+2)(x+5)(x-3)(x-1)$

$$= x^4 + (2+5-3-1)x^3 + (10-6-2-15-5+3)x^2 + (-30-10+15+6)x + 30$$

$$= x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30.$$

8·2. n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

[*To find the expansion of $(x+a)^n$ when n is a positive integer.*]

আমরা প্রথমে n-সংখ্যক উৎপাদক-সম্বলিত $(x+a)(x+b)(x+c)....$ $....(x+m)$ রাশিটি বিবেচনা করিব।

এই রাশির বিস্তৃতি $x+a$, $x+b$, $x+c,....(x+m)$ এই n-সংখ্যক উৎপাদকসমূহের ক্রমিক গুণফল এবং ইহার প্রত্যেক পদ n-মাত্রাবিশিষ্ট; কেননা ইহার প্রত্যেক পদ n-সংখ্যক উৎপাদক হইতে একটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল।

এখানে x-এর উচ্চতম ঘাত x^n, n-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটি হইতে x লইয়া গঠিত।

x^{n-1}-সম্বলিত পদগুলি $(n-1)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে গৃহীত x এবং অবশিষ্ট উৎপাদক হইতে x ব্যতীত $a, b, c,....$ প্রভৃতি অক্ষরগুলির একটির গুণফলসম্ভূত। সুতরাং, x^{n-1} এর সহগ $a, b, c,....$প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরের সমষ্টি। ইহা S_1 দ্বারা সূচিত কর। x^{n-2}-সম্বলিত পদগুলি $(n-2)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে গৃহীত x এবং অবশিষ্ট দুইটি উৎপাদক হইতে $a, b, c,....$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরগুলির মধ্য হইতে গৃহীত দুইটির গুণফল হইতে উদ্ভূত।

সুতরাং, x^{n-2}-এর সহগ $a, b, c,....$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরসমূহের দুই-দুইটি করিয়া গৃহীত অক্ষরদ্বয়ের গুণফলের সমষ্টি। ইহা S_2 দ্বারা সূচিত কর এবং সাধারণভাবে x^{n-r}-সম্বলিত পদগুলি $(n-r)$-সংখ্যক উৎপাদক হইতে x অক্ষরটি সম্ভাব্য সকলপ্রকারে গৃহীত এবং অবশিষ্ট r-সংখ্যক উৎপাদক হইতে $a, b, c,....$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরগুলির মধ্য হইতে গৃহীত r-সংখ্যক অক্ষরের গুণফল হইতে উদ্ভূত। সুতরাং, x^{n-r}-এর সহগ $a, b, c,....$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষর হইতে সম্ভাব্য সকলপ্রকারে গৃহীত r-সংখ্যক অক্ষরসমূহের গুণফলের সমষ্টি। ইহা S_r দ্বারা সূচিত কর।

স্পষ্টতঃই এই গুণফলের শেষ পদ $abcd....m$. ইহা S_n দ্বারা সূচিত কর।

$$\therefore \quad (x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+m)$$
$$= x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \cdots + S_rx^{n-r} + \cdots + S_{n-1}x + S_n.$$

S_1 দ্বারা নির্দেশিত সমষ্টিতে পদ-সংখ্যা $= r$, S_2 দ্বারা নির্দেশিত সমষ্টিতে পদ-সংখ্যা n-সংখ্যক বস্তু হইতে দুইটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যার সমান; ইহা $= {}^nC_2$.

এখন মনে কর, $a = b = c = \cdots = m$, তাহা হইলে,

$$S_1 = {}^nC_1a,\ S_2 = {}^nC_2a^2,\ S_3 = {}^nC_3a^3, \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \quad (x+a)^n = x^n + {}^nC_1ax^{n-1} + {}^nC_2a^2x^{n-2} + \cdots$$
$$+ {}^nC_ra^rx^{n-r} + \cdots + {}^nC_{n-1}a^{n-1}x + {}^nC_na^n. \quad \cdots \quad (1)$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + \cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots + x^n \cdots \quad (2)$$

এখন, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$, ...${}^nC_r$.... প্রভৃতির মান বসাইয়া (1) ও (2) হইতে আমরা পাই

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^2x^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^3x^{n-3} + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^rx^{n-r}$$
$$+ \cdots + na^{n-1}x + a^n. \quad \cdots \quad (3)$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r + \cdots x^n. \quad \cdots \quad (4)$$

ইহাই **দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem)** নামে অভিহিত এবং দক্ষিণ পক্ষের রাশিমালাকে $(x+a)^n$ এবং $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি বলে। মনে রাখিবে (2) এবং (4)-এর আকার একই, (2)-এর বিস্তৃতি বিপরীতক্রমে লিখিলে (4) পাওয়া যায়।

বিকল্প পদ্ধতি। (আরোহণ প্রণালী: Method of Induction)

n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, (2)-এর প্রমাণ।

প্রকৃত গুণন দ্বারা,

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1 a^{2-1}x + x^2$$
$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$
$$= a^3 + {}^3C_1 a^{3-1}x + {}^3C_2 a^{3-2}x^2 + x^3$$

পাওয়া যায়। এখন লক্ষ্য কর, $n=2$ ও 3র জন্য উপরের উপপাদ্যের সত্যতা পরিস্ফুট। এখন ধরা যাক, $n=m$ র জন্যও উপরের উপপাদ্য সত্য, সুতরাং,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1 a^{m-1}x + {}^mC_2 a^{m-2}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1} + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots + x^m.$$

উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)[a^m + {}^mC_1 a^{m-1}x + {}^mC_2 a^{m-2}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^mC_{r-1}a^{m-r+1}x^{r-1} + {}^mC_r a^{m-r}x^r + \cdots + x^m]$$
$$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + 1)a^m.x + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + \cdots$$
$$+ ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r)a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

যেহেতু, ${}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r,$ [§ 7·9, Ex. 2.]

সুতরাং, ${}^mC_1 + 1 = {}^{m+1}C_1,\ {}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2$; ইত্যাদি,

দক্ষিণ পক্ষকে সাজাইলে

$$(a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1 a^{m+1-1}x + {}^{m+1}C_2 a^{m+1-2}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^{m+1}C_r a^{m+1-r}.x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

দেখা যায় যে, উপরের উপপাদ্যটি m র জন্য সত্য হইলে $(m+1)$ র জন্যও সত্য। যেহেতু উপপাদ্যটি $n=2$, 3 র জন্য সত্য, উহা $n=4$ র জন্য সত্য। আবার $n=4$ র জন্য সত্য হইবে বলিয়া উপপাদ্যটি $n=5$ র জন্য সত্য। এইভাবে দেখা যায় যে, উপপাদ্যটি n-র সকল অখণ্ড ধনসংখ্যার জন্য সত্য হইবে। অতএব, n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$+ {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots + x^n.$$

অনুরূপভাবে (1) এর বিস্তৃতিও বিকল্প পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য 1. উপরের প্রমাণ-পদ্ধতিকে **আরোহণ পদ্ধতি** (Method of Induction) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 2. (1)-এর দক্ষিণ পক্ষকে বিস্তৃতি বলা হয় এবং ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots {}^nC_r \ldots {}^nC_n$ কে দ্বিপদ সহগ (Binomial coefficients) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য 3. (2) হইতে দেখা যায় যে, বিস্তৃতি $(a+x)^n$-এর পদ-সংখ্যা সসীম এবং উহাতে মোট পদসংখ্যা $(n+1)$, অর্থাৎ সূচক-সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক।

দ্রষ্টব্য 4. প্রত্যেক পদে, x-এর সূচক ঐ পদটির ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম এবং প্রত্যেক পদে x-এর সূচক ঐ পদের C-এর suffix-এর সমান।

দ্রষ্টব্য 5. (3) হইতে লক্ষ্য কর যে, প্রত্যেক সহগের লব ও হরে উৎপাদক-সংখ্যা ঐ পদের ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

8·3. বিস্তৃতির সাধারণ পদ (General Term)।

$(x+a)^n$ এর বিস্তৃতির দ্বিতীয় পদের সহগ $^nC_1$, তৃতীয় পদের সহগ $^nC_2$, চতুর্থ পদের সহগ $^nC_3$ ইত্যাদি। প্রত্যেক ক্ষেত্রে 'C'-এর সহিত যুক্তসংখ্যা বিস্তৃতির পদ-নির্দেশক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম। সুতরাং, বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r হইবে। বিস্তৃতির এই $(r+1)$-তম পদ বিস্তৃতির সাধারণ পদ। n এবং r এর যথাযোগ্য মান দিয়া ইহার সাহায্যে বিস্তৃতির যে-কোন নির্ধারিত পদ নির্ণয় করা যায়। বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ অর্থাৎ সাধারণ পদ $^n\mathrm{C}_r\mathrm{x}^{n-r}\mathrm{a}^r$; বিস্তারিত ভাবে লিখিলে

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^{n-r}a^r \text{ হয়।}$$

কোন নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে সাধারণ পদের এই সূত্র প্রয়োগ করিতে হইলে ইহা স্মরণ রাখা প্রয়োজন যে, a-এর সূচক C-এর সহিত যুক্ত অঙ্কের সমান এবং x ও a-এর সূচক-সমষ্টি n.

আবার $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলিকে যদি t_1, $t_2,\ldots t_r$, $t_{r+1}\ldots t_n$ প্রভৃতি দ্বারা সূচিত করা যায় তাহা হইলে, সেক্ষেত্রে সাধারণ পদ t_{r+1}, সুতরাং,

$$t_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r}a^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^{n-r}.a^r.$$

8·4. দ্বিপদ উপপাদ্যে $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি সুবিধার্থে $^nC_1$, $^nC_2$, $^nC_3,\ldots,{}^nC_r,\ldots,{}^nC_n$ প্রতীকসমূহের দ্বারা সূচিত করা হয়, এবং কখনও কখনও n উহ্য রাখিয়া আরও সংক্ষেপে $C_1, C_2, C_3,\ldots, C_r,\ldots,C_n$ দ্বারা সূচিত করা হইয়া থাকে। এই সংজ্ঞানুসারে

$$(x+a)^n = x^n + C_1ax^{n-1} + C_2a^2x^{n-2} + \cdots$$
$$+ C_ra^rx^{n-r} + \cdots + C_na^n.$$

এখানে a-এর পরিবর্তে $-a$ লিখিলে,

$$(x-a)^n = x^n + C_1(-a)x^{n-1} + C_2(-a)^2x^{n-2} + C_3(-a)^3x^{n-3} + \cdots + C_r(-a)^rx^{n-r} + \cdots + C_n(-a)^n$$

$$= x^n - C_1ax^{n-1} + C_2a^2x^{n-2} - C_3a^3x^{n-3} + \cdots + (-1)^rC_ra^rx^{n-r} + \cdots + (-1)^nC_na^n.$$

$(x+a)^n$ এবং $(x-a)^n$-এর বিস্তৃতিদ্বয় লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, উভয় বিস্তৃতির একই স্থানীয় পদ অভিন্ন, কিন্তু $(x-a)^n$-এর বিস্তৃতিতে পদগুলি পর্যায়ক্রমে একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক এবং এই বিস্তৃতির সাধারণ পদ ও শেষ পদ ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক তাহা নির্ভর করে r ও n যুগ্ম অথবা অযুগ্ম, তাহার উপর।

আবার, $(x+a)^n = x^n + C_1ax^{n-1} + C_2a^2x^{n-2} + \cdots\cdots + C_ra^rx^{n-r} + \cdots + C_na^n$, ইহাতে উভয় পক্ষে $x=1$ এবং $a=x$ লিখিলে আমরা পাই

$$(1+x)^n = 1 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_rx^r + \cdots + C_nx^n$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots + x^n.$$

ইহা দ্বিপদ উপপাদ্যের সরল আকার এবং কেহ কেহ ইহাকেও দ্বিপদ উপপাদ্য নামে অভিহিত করেন। আমরা $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়াছি। বিপরীতক্রমে, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাহায্যে $(x+a)^n$-এর-বিস্তৃতি নিম্নলিখিতভাবে নির্ণয় করা যায়।

$$(x+a)^n = \left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$

$$= x^n\left\{1 + n\cdot\frac{a}{x} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{a^2}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\frac{a^r}{x^r} + \cdots\cdots + \frac{a^n}{x^n}\right\}$$

$$= x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^2x^{n-2} + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^rx^{n-r} + \cdots + a^n.$$

সমদূরবর্তী পদসমূহ (Equidistant Terms)।

8·5. শ্রেণীর প্রথম ও শেষ দিক হইতে যে দুইটি পদ সমান দূরে অর্থাৎ সমান-সংখ্যক পদের পর অবস্থিত, সেই পদদুইটিকে সমদূরবর্তী পদ বলে।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সহগ পরস্পর সমান।

(In the expansion of $(a+x)^n$, the coefficients of the terms equidistant from the beginning and the end are equal.)

বিস্তৃতির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ $= {}^nC_r$. এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1$. সুতরাং, এই বিস্তৃতির শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের পূর্বে প্রথম হইতে $\{(n+1)-(r+1)\}$-সংখ্যক বা $(n-r)$-সংখ্যক পদ আছে।

$\therefore$ বিস্তৃতির শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদ প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদ।

$\therefore$ ইহার সহগ $= {}^nC_{n-r}$. কিন্তু ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

$\therefore$ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ এবং শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ পরস্পর সমান।

8·6. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে মধ্যবর্তী পদ বা পদদ্বয় (Middle term or terms)।

n-এর মান অনুসারে $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির একটি বা দুইটি মধ্যবর্তী পদ হইতে পারে।

এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1$. সুতরাং, n অযুগ্ম হইলে পদ-সংখ্যা যুগ্ম হইবে। তখন এই বিস্তৃতির মধ্যবর্তী পদ দুইটি হইবে। এবং n যুগ্ম হইলে, পদসংখ্যা অযুগ্ম হইবে এবং তখন একটি মধ্যবর্তী পদ হইবে।

(1) মনে কর, **n যুগ্ম** এবং $= 2m$, $\therefore$ $m = \frac{n}{2}$. এক্ষেত্রে পদ-সংখ্যা $= 2m+1$, একটি অযুগ্ম সংখ্যা। $\therefore$ মধ্যবর্তী পদ একটি এবং উহা $(m+1)$-তম বা $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।

$$\therefore \text{ মধ্যবর্তী পদ } {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}} = \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}n \lfloor \frac{1}{2}n} a^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}}.$$

(2) এখন মনে কর, n অযুগ্ম এবং ইহার মান $2m+1$.

$\therefore \quad m=\frac{1}{2}(n-1)$. এক্ষেত্রে পদ-সংখ্যা $(2m+2)$, একটি যুগ্ম-সংখ্যা।

$\therefore \quad (m+1)$-তম অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n-1)+1\}$-তম এবং $(m+2)$-তম অর্থাৎ $\{\frac{1}{2}(n+1)+1\}$-তম পদদ্বয় মধ্যবর্তী পদ।

$\therefore$ **মধ্যবর্তী পদদ্বয়** $^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}}$

এবং $\qquad ^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}$

অর্থাৎ, $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-1)\, \lfloor \frac{1}{2}(n+1)}\, a^{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}}$

এবং $\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n+1)\, \lfloor \frac{1}{2}(n-1)}\, a^{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}$

এখানে লক্ষ্য কর, দুইটি মধ্যপদের সহগদ্বয়ের সাংখ্যমান একই।

8·7. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সহগ (Greatest Coefficient)।

এই বিস্তৃতির সাধারণ পদের সহগ $= {}^nC_r$. এক্ষেত্রে আমাদের নির্ণয় করিতে হইবে r-এর মান কত হইলে ${}^nC_r$-এর মান বৃহত্তম হইবে।

পূর্ববর্তী অধ্যায়ের § 7·10 অনুচ্ছেদ হইতে জানি n যখন যুগ্ম, তখন ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ বৃহত্তম এবং n যখন অযুগ্ম তখন দুইটি পদের সহগ বৃহত্তম এবং তাহারা পরস্পর সমান। এই সহগদ্বয় ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$.

8·8. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম পদ (Greatest term)।

[To find the greatest term in the expansion of $(a+x)^n$].

মনে কর, বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদুইটিকে যথাক্রমে t_r এবং t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হইল।

এখন, $\quad t_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} x^r$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3.\cdots(r-1)r} \cdot a^{n-r}x^r\,;$$

এবং $\quad t_r = {}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{1.2.3.\cdots(r-1)} \cdot a^{n-r+1}x^{r-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{x}{a}.$$

$\therefore \quad t_{r+1} >, =$ বা $< t_r$ হইবে, যদি $(n-r+1)x >; =$ বা $< ra$ হয় ;

অর্থাৎ, যদি $(n+1)x >, =,$ বা $< ra + rx$, বা $r(a+x)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{(n+1)x}{a+x} >, =,$ বা $< r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা $> \dfrac{(n+1)x}{a+x}$ হয়।

(1) এখন, $\dfrac{n+1}{a+x} \cdot x$ যদি একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে মনে কর, উহা p-এর সমান।

এখন, r-এর $(p-1)$ পর্যন্ত সকল মানের জন্য $t_{r+1} > t_r$, অর্থাৎ, t_1, t_2, $t_3, \ldots, t_{p-1}$ এবং t_p পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং t_p ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ।

যখন, $\quad r = p$, $t_{r+1} = t_r$, $\quad i.e.$, $t_{p+1} = t_p$.

$r > p$ হইলে, $t_{r+1} < t_r$, এবং পদগুলির প্রত্যেকটির মান ইহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা ক্রমশঃ হ্রাস পাইবে।

সুতরাং, $\quad t_{p+1} = t_p$ এবং ইহারাই বিস্তৃতির বৃহত্তম পদদ্বয়।

(2) আবার, যদি $\dfrac{n+1}{a+x}\, x$ একটি পূর্ণসংখ্যা না হয়, তবে মনে কর, উহা পূর্ণ সংখ্যা $q +$ একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশের সমান।

তাহা হইলে, r-এর q পর্যন্ত সকল মানের জন্য, $r < \dfrac{n+1}{a+x} \cdot x$. অতএব $t_{r+1} > t_r$.

আবার r-এর $q+1$ অথবা বৃহত্তর মানের জন্য, $t_{r+1} < t_r$.

অতএব, $t_{q+1} > t_q > t_{q-1} \ldots$ এবং $t_{q+1} > t_{q+2} > t_{q+3} \ldots$

সুতরাং, t_{q+1} ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ। অর্থাৎ $(q+1)$-তম পদই বিস্তৃতিটির বৃহত্তম পদ।

দ্রষ্টব্য 1. $(a+x)^n$ এবং $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলি একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট। কিন্তু উভয় বিস্তৃতির যুগ্মপদগুলি বিপরীত চিহ্নযুক্ত। সুতরাং, দ্বিতীয় বিস্তৃতির চিহ্ন-নির্বিশেষে বৃহত্তম পদ স্থির করিতে হইলে ঋণাত্মকচিহ্নযুক্ত পদগুলি লইয়া উপরে বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে নির্ণয় করিতে হয়।

দ্বিপদরাশির কোন ঘাতের বিস্তৃতির বৃহত্তম পদনির্ণয়ে উপরোক্ত সূত্র প্রয়োগ না করিয়া উপরে প্রদর্শিত পদ্ধতি প্রয়োগই সমধিক প্রশস্ত।

দ্রষ্টব্য 2. উপরোক্ত প্রণালীতে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যায়; সেস্থলে a-এর স্থলে 1 বসাইতে হইবে। $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির চিহ্ন-নিরপেক্ষ বৃহত্তম পদ (numerically greatest term) নির্ণয়ের প্রণালীও অনুরূপ, কেবল এক্ষেত্রে ঋণাত্মক চিহ্নগুলি বর্জন করিতে হইবে।

৪'9. দ্বিপদরাশির বিস্তৃতির সহগের ধর্মাবলী (Properties of Binomial Coefficients)।

(i) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগ-সমষ্টি $=2^n$.

(*The sum of the coefficients in the expansion of* $(1+x)^n$ *is* 2^n.)

আমরা জানি $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$, একটি অভেদ। এই অভেদের উভয়পক্ষে $x=1$ বসাইলে আমরা পাই

$$\begin{aligned}2^n &= 1+C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n\\ &= C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n = \text{সহগ-সমষ্টি।}\end{aligned}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ-সমষ্টি $=2^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। $C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n=2^n-1$,

বা, ${}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_n=2^n-1$,

অর্থাৎ, **n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে একযোগে 1 হইতে n-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত সমবায়গুলির মোট সংখ্যা $=2^n-1$.**

(ii) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির অযুগ্ম পদসমূহের সহগ-সমষ্টি উহার যুগ্ম পদসমূহের সহগ-সমষ্টির সমান।

(*In the expansion of* $(1+x)^n$, *the sum of the coefficients of the odd terms is equal to the sum of the coefficients of the even terms.*)

$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots\cdots + C_nx^n$, একটি অভেদ। এই অভেদের উভয় পক্ষে $x=-1$ বসাইয়া আমরা পাই ($1 = C_0$ লিখিয়া)

$$0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \cdots\cdots + (-1)^n C_n.$$

$$\therefore \quad C_0 + C_2 + C_4 + \cdots\cdots = C_1 + C_3 + C_5 + \cdots\cdots$$

$= \frac{1}{2} \times$ বিস্তৃতির সহগসমূহের সমষ্টি

$$= \tfrac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}.$$

8·10. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *Expand* (i) $(3x+2y)^7$ *and* (ii) $(\frac{1}{3}x - 3y)^6$.

(i) $$(3x+2y)^7 = (3x)^7 + {}^7C_1.2y.(3x)^6 + {}^7C_2(2y)^2.(3x)^5 + {}^7C_3(2y)^3.(3x)^4 + {}^7C_4.(2y)^4.(3x)^3 + {}^7C_5(2y)^5.(3x)^2 + {}^7C_6\,(2y)^6.3x + {}^7C_7(2y)^7$$

$$= 3^7x^7 + 7.2y.3^6.x^6 + \frac{7.6}{1.2}2^2y^2.3^5.x^5 + \frac{7.6.5}{1.2.3}2^3.y^3.3^4.x^4 + \frac{7.6.5}{1.2.3}.2^4.y^4.3^3.x^3 + \frac{7.6}{1.2}.2^5.y^5.3^2.x^2 + 7.2^6.y^6.3x + 2^7.y^7$$

$$= 2187x^7 + 10206x^6y + 20412x^5y^2 + 22680x^4y^3 + 15120x^3y^4 + 6048x^2y^5 + 1344xy^6 + 128y^7.$$

(ii) $$(\tfrac{1}{3}x - 3y)^6 = \frac{x^6}{3^6} + 6.(-3y).\left(\frac{x}{3}\right)^5 + \frac{6.5}{1.2}.(-3y)^2.\left(\frac{x}{3}\right)^4 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.(-3y)^3.\left(\frac{x}{3}\right)^3 + \frac{6.5}{1.2}.(-3y)^4.\left(\frac{x}{3}\right)^2 + 6.(-3y)^5.\frac{x}{3} + (-3y)^6$$

$$= \frac{x^6}{729} - 6.3y.\frac{x^5}{243} + 15.9y^2.\frac{x^4}{81} - 20.27y^3.\frac{x^3}{27} + 15.81y^4.\frac{x^2}{9} - 6.243y^5.\frac{x}{3} + 729y^6$$

$$= \frac{x^6}{729} - \frac{2}{27}x^5y + \frac{5}{3}x^4y^2 - 20x^3y^3 + 135x^2y^4 - 486xy^5 + 729y^6.$$

Ex. 2. *Find (i) the 10th term in the expansion of* $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{12}$.

(ii) The 9th term in the expansion of $\left(\frac{a}{3}-3b\right)^{15}$.

(i) $\left(2x+\frac{y}{2}\right)^{12}$-এর বিস্তৃতির নির্ণেয় দশম পদ

$$={}^{12}C_9\cdot\left(\frac{y}{2}\right)^9\cdot(2x)^3=\frac{12.11.10}{1.2.3.}\cdot\frac{y^9}{2^9}\cdot2^3.x^3$$

$$=220.x^3\cdot\frac{y^9}{64}=\frac{55}{16}x^3y^9.$$

(ii) $\left(\frac{a}{3}-3b\right)^{15}$-এর বিস্তৃতির নির্ণেয় নবম পদ

$$={}^{15}C_8.(-3b)^8.\left(\frac{a}{3}\right)^7=\frac{15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot3^8b^8\cdot\frac{a^7}{3^7}$$

$$=6435\times3a^7b^8=19305a^7b^8.$$

Ex. 3. *Find the coefficient of (i)* x^{10} *in the expansion of* $\left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{ab}{x^2}\right)^{10}$.

(ii) x^{10} *and* x^{-30} *in the expansion of* $\left(x^5-\frac{1}{x^3}\right)^{18}$.

(i) মনে কর, $\left(\frac{x^3}{a^2}+\frac{ab}{x^2}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{10} আছে।

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $={}^{10}C_r\cdot\left(\frac{ab}{x^2}\right)^r\cdot\left(\frac{x^3}{a^2}\right)^{10-r}$

$$={}^{10}C_r\cdot\frac{a^rb^r}{x^{2r}}\cdot\frac{x^{30-3r}}{a^{20-2r}}={}^{10}C_ra^{3r-20}.b^rx^{30-5r}.$$

এই $(r+1)$-তম পদটিতে x^{10} আছে বলিয়া,

$$x^{10}=x^{30-5r},\ \text{বা},\ 10=30-5r,\ \text{বা},\ 5r=20.\ \therefore\ r=4.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $={}^{10}C_4.a^{12-20}b^4=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\cdot a^{-8}.b^4=\frac{210b^4}{a^8}.$

(ii) মনে কর, $\left(x^5 - \frac{1}{x^3}\right)^{18}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{10} আছে

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{18}C_r \cdot \left(-\frac{1}{x^3}\right)\ (x^5)^{18-r}$

$$= (-1)^r . {}^{18}C_r \frac{1}{x^{3r}} \cdot x^{90-5r} = (-1)^r . {}^{18}C_r x^{90-8r}.$$

এই পদটিতে x^{10} আছে বলিয়া, $x^{10} = x^{90-8r}$, বা, $10 = 90 - 8r$, বা, $8r = 80$. $\therefore\ r = 10$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সহগ} = (-1)^{10} . {}^{18}C_{10} = \frac{18.17.16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6.7.8}$$

$$= 43758.$$

আবার, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^{-30} থাকিলে, $-30 = 90 - 8r$ হইবে অর্থাৎ $8r = 120$, বা, $r = 15$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির x^{-30}-এর সহগ

$$= (-1)^{15} . {}^{18}C_{15} = -\frac{18.17.16}{1.2.3} = -816.$$

Ex. 4. *Find the term independent of x in* $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

মনে কর, $\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ x-বর্জিত অর্থাৎ x-এর সূচক 0.

এখন, এই বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ $= {}^{20}C_r \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r \cdot (x^3)^{20-}$

$$= (-1)^r . {}^{20}C_r . x^{60-5r}.$$

যেহেতু, এই $(r+1)$-তম পদ x-বর্জিত, $\therefore\ 60 - 5r = 0$, অর্থাৎ $r = 12$.

$\therefore$ x-বর্জিত এই $(r+1)$-তম পদ

$$= (-1)^{12} . {}^{20}C_{12} = \frac{20.19.18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6.7.8} = 125970.$$

Ex. 5. *Find the middle term of (i)* $(2a^2x - by)^{10}$ *and (ii)* $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2n}$.

(i) এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা 11. সুতরাং, ইহার মধ্যবর্তী পদ বিস্তৃতির ষষ্ঠ পদ।

∴ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ $= {}^{10}C_5(-by)^5.(2a^2x)^{10-5}$

$$= -\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}b^5y^5.2^5.a^{10}.x^5$$
$$= -252 \times 32a^{10}x^5b^5y^5$$
$$= -8064a^{10}b^5x^5y^5.$$

(ii) এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $2n+1$, একটি অযুগ্ম সংখ্যা। সুতরাং, ইহার মধ্যবর্তী পদ মাত্র একটি এবং তাহা ইহার $(n+1)$-তম পদ।

∴ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ $= {}^{2n}C_n\left(-\frac{1}{x}\right)^n.x^{2n-n}$

$$= (-1)^n.\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}.\frac{1}{x^n}.x^n = (-1)^n.\frac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}.$$

Ex. 6. *Find the two middle terms of* $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

এই বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $2n+2$, একটি যুগ্মসংখ্যা। সুতরাং, ইহার মধ্যবর্তী পদদুইটি $(n+1)$-তম এবং $(n+2)$-তম পদ।

∴ নির্ণেয় $(n+1)$-তম পদ $= {}^{2n+1}C_n.\left(\frac{1}{x}\right)^n.(x)^{2n+1-n}$

$$= \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n\lfloor n+1}.\frac{1}{x^n}.x^{n+1} = \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n\lfloor n+1}x.$$

এবং $(n+2)$-তম পদ $= {}^{2n+1}C_{n+1}.\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}.x^{2n+1-n-1}$

$$= \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n+1\lfloor n}.\frac{1}{x^{n+1}}.x^n = \frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n+1\lfloor n}.\frac{1}{x}.$$

Ex. 7. *If* x^{2r} *occurs in the expansion of* $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{4n}$ *prove that its coefficient is* $(-1)^{\frac{1}{3}(4n-r)}\frac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{1}{3}(4n-r)\lfloor \frac{1}{3}(2n+r)}$.

মনে কর, $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{4n}$-এর বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদে x^{2r} অবস্থিত ।

এক্ষণে, এই বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদ $= {}^{4n}C_m \left(-\frac{1}{x}\right)^m . (x^2)^{4n-m}$

$$= (-1)^m . {}^{4n}C_m . \frac{1}{x^m} . x^{8n-2m} = (-1)^m . {}^{4n}C_m \, x^{8n-3m}.$$

$\therefore \quad 2r = 8n - 3m$, বা, $3m = 8n - 2r. \quad \therefore \quad m = \frac{2}{3}(4n - r).$

$\therefore \quad$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^{\frac{2}{3}(n-r)} . {}^{4n}C_{\frac{2}{3}(4n-r)}$

$$= (-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)} . \frac{\underline{|4n}}{\underline{|\tfrac{2}{3}(4n-r)} \; \underline{|4n - \tfrac{2}{3}(4n-r)}}$$

$$= (-1)^{\frac{2}{3}(4n-r)} . \frac{\underline{|4n}}{\underline{|\tfrac{2}{3}(4n-r)} \; \underline{|\tfrac{2}{3}(2n+r)}}.$$

Ex. 8. *Show that the middle term in the expansion of* $(1-x)^{2n}$ *is* $(-1)^n . \frac{1.3.5.7. \cdots (2n-1)}{\underline{|n}} . 2^n x^n.$

যেহেতু $(1-x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে $(2n+1)$-সংখ্যক পদ আছে, সুতরাং, এই বিস্তৃতির $(n+1)$-তম পদ ইহার মধ্যবর্তী পদ ।

$\therefore \quad$ নির্ণেয় মধ্যবর্তী পদ $= (1-x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির $(n+1)$-তম পদ

$$= {}^{2n}C_n (-x)^n$$

$$= (-1)^n \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}} x^n = (-1)^n . \frac{1.2.3.4.5.6.7.8. \cdots (2n-1)\, 2n}{\underline{|n}\,\underline{|n}} . x^n$$

$$= (-1)^n . \frac{1.3.5.7. \cdots (2n-1) . 2.1.2.2.2.3.2.4 \cdots 2.n}{\underline{|n}\,\underline{|n}} . x^n$$

$$= (-1)^n . \frac{1.3.5.7. \cdots (2n-1) . 2^n . 1.2.3.4 \cdots n . \, x^n}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$$

$$= (-1)^n . \frac{1.3.5.7. \cdots (2n-1)}{\underline{|n}} . 2^n x^n.$$

Ex. 9. *Find the general term in the expansion of* $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^{2n+1}$ *; hence show that there is no term free from* $\frac{x}{y}$. *(n is an integer).*

দ্বিপদরাশির বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদই সাধারণ পদ।

$\therefore$ সাধারণ পদ $= {}^{2n+1}C_r\left(\dfrac{y}{x}\right)^r\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2r-r+1}$

$$= {}^{2n+1}C_r\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{2(n-r)+1}.$$

সাধারণ পদে $\dfrac{x}{y}$ অনুপস্থিত হইবে, যদি $2(n-r)+1=0$ হয়,

অর্থাৎ, $2r=2n+1$,

অর্থাৎ, $r=n+\frac{1}{2}$,

অর্থাৎ, r একটি অখণ্ড সংখ্যা নয়, কিন্তু তাহা অসম্ভব।

সুতরাং, উক্ত বিস্তৃতিতে $\dfrac{x}{y}$-বর্জিত কোন পদ থাকিবে না।

Ex. 10. *Find the numerically greatest coefficient in the expansion of (i) $(1+x)^{12}$ and (ii) $(5-4x)^9$.*

(i) মনে কর, এই বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদ্বয় যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1}.

তাহা হইলে, $T_{r+1}=\dfrac{12-r+1}{r}x\times T_r=\dfrac{13-r}{r}\times x\times T_r$.

এক্ষেত্রে আমাদের সহগগুলির সাংখ্যমান বিবেচনা করিতে হইবে বলিয়া x-এর মান বিবেচ্য নহে।

$\therefore$ T_{r+1}-এর সাংখ্যমান বৃহত্তম যখন গুণক $\dfrac{13-r}{r}>$ বা $=1$, অর্থাৎ $\dfrac{13}{r}-1>$ বা $=1$, অর্থাৎ $\dfrac{13}{r}>$ বা $=2$, অর্থাৎ, $2r<$ বা $=13$ অর্থাৎ $r<$ বা $=\frac{13}{2}$ অর্থাৎ $6\frac{1}{2}$. এখন, r একটি অখণ্ড সংখ্যা $6\frac{1}{2}$ অপেক্ষা কম বলিয়া $r=6$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির সপ্তম পদের সহগের সাংখ্যমান বৃহত্তম এবং ইহার সাংখ্যমান $={}^{12}C_6=\dfrac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}=924$.

(ii) $(5-4x)^9=5^9\left(1-\dfrac{4x}{5}\right)^9$.

সুতরাং, এখানে $\left(1-\dfrac{4x}{5}\right)^9$-এর বিস্তৃতির বিবেচনা করিলেই চলিবে।

এখন, এই বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ যথাক্রমে T_r ও T_{r+1} হইলে,

$$T_{r+1} = \frac{9-r+1}{r} \cdot \frac{4x}{5} T_r = \frac{10-r}{r} \cdot \tfrac{4}{5}x \times T_r, \text{ সাংখ্যমান হিসাবে।}$$

$\therefore \quad T_{r+1} > T_r$ যতক্ষণ $\frac{40-4r}{5r} >$ বা $= 1$.

অর্থাৎ $40-4r >$ বা $= 5r$, অর্থাৎ $9r <$ বা $= 40$ অর্থাৎ $r <$ বা $= 4\frac{4}{9}$.

যেহেতু r একটি অখণ্ড সংখ্যা $4\frac{4}{9}$ অপেক্ষা কম, $\therefore r = 4$.

$\therefore$ এই বিস্তৃতির পঞ্চম পদের সহগের সাংখ্যমান বৃহত্তম এবং ইহার সাংখ্যমান $= 5^9 \times {}^9C_4 \times (\frac{4}{5})^4 = 5^5 \times \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} \times 4^4 = 5^5 \times 4^4 \times 126$

$$= 100800000.$$

Ex. 11. *Find the greatest term in the expansion of* $(x+a)^n$ *when* $x = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{3}$, $n = 10$.

T_r ও T_{r+1} যথাক্রমে $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ হইলে,

$$T_{r+1} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{a}{x} \cdot T_r = \left(\frac{n+1}{r} - 1\right) \frac{a}{x} \cdot T_r$$

$$= \left(\frac{11}{r} - 1\right) \cdot \tfrac{2}{3} . T_r, \quad [\text{ } x, a, n\text{-এর মান বসাইয়া }]$$

$\therefore \quad T_{r+1} > T_r$, যতক্ষণ $\left(\frac{11}{r} - 1\right) \cdot \frac{2}{3} >$ বা $= 1$.

অর্থাৎ, $\frac{11}{r} - 1 >$ বা $= \frac{3}{2}$, অর্থাৎ $\frac{11}{r} >$ বা $= \frac{5}{2}$.

অর্থাৎ $r <$ বা $= 4\frac{2}{5}$.

যেহেতু, r, $4\frac{2}{5}$ অপেক্ষা কম একটি অখণ্ড সংখ্যা, $\therefore r = 4$.

$\therefore$ সুতরাং, এই বিস্তৃতির পঞ্চম পদ বৃহত্তম এবং ইহার মান

$$= {}^{10}C_4 . a^4 . x^6 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} . \frac{1}{3^4} . \frac{1}{2^6} = \frac{35}{864}.$$

Ex. 12. *The second, third and fourth terms in the expansion of* $(x+y)^n$ *are* 240, 720 *and* 1080 *respectively ; find* x, y, n.

মনে কর, $(x+y)^n$-এর বিস্তৃতির দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ যথাক্রমে T_2, T_3, T_4.

$$\therefore \quad T_2 = nx^{n-1}y,\ T_3 = \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}y^2$$

এবং $$T_4 = \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^{n-3}y^3$$

$$\therefore \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{2x}{(n-1)y} = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

এবং $$\frac{T_3}{T_4} = \frac{3x}{(n-2)y} = \frac{720}{1080} = \frac{2}{3} \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

(1) কে (2) দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{2(n-2)}{3(n-1)} = \frac{1}{2}$, বা, $4(n-2) = 3(n-1)$.

$$\therefore \quad n = 5.$$

$$\therefore \quad T_2 = 5x^4y = 240,\ T_3 = 10x^3y^2 = 720,\ T_4 = 10x^2y^3 = 1080.$$

$$\therefore \quad x^4y = 48 \ \cdots (3),\ \ x^3y^2 = 72 \ \cdots (4),\ \ x^2y^3 = 108 \ \cdots (5).$$

(3) কে (4) দ্বারা ভাগ করিয়া পাই, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$. $\quad \therefore \quad x = \frac{2}{3}y \ \cdots (6)$

x-এর এই মান (3)-এ বসাইলে $(\frac{2}{3}y)^4.y = 48$, বা $\frac{16}{81}.y^5 = 48$

বা $y^5 = \frac{48 \times 81}{16} = 3^5$

$\therefore \quad y = 3. \quad \therefore$ (6) হইতে আমরা পাই $x = 2$.

$\therefore \quad x = 2,\ y = 3$ এবং $n = 5$.

Ex. 13. *If n is any positive integer, show that the integral part of* $(9+4\sqrt{5})^n$ *is an odd number.* [*Given* $\sqrt{5} = 2{\cdot}2$]

মনে কর, $(9+4\sqrt{5})^n$ = ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা I এবং ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ x.

$$\therefore \quad I + x = 9^n + C_1 9^{n-1}.4\sqrt{5} + C_2.9^{n-2}.(4\sqrt{5})^2$$
$$+ C_3.9^{n-3}.(4\sqrt{5})^3 + C_4.9^{n-4}.(4\sqrt{5})^4 + \cdots \cdots (1)$$

এখন, $9 - 4\sqrt{5}$ একটি ধনাত্মক রাশি এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

$\therefore$ $(9-4\sqrt{5})^n$ একটি ধনাত্মক প্রকৃত ভগ্নাংশ। মনে কর, ইহার মান y.

$$\therefore \quad y = 9^n - C_1 9^{n-1}.4\sqrt{5} + C_2 9^{n-2}.(4\sqrt{5})^2$$
$$- C_3 9^{n-3}.(4\sqrt{5})^3 + C_4 9^{n-4}.(4\sqrt{5})^4 - \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া,

$$I + x + y = 2(9^n + C_2 9^{n-2}.80 + C_4.9^{n-4}.6400 + \cdots)$$
$$= \text{একটি যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।}$$

$\therefore$ I একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা বলিয়া, $x+y$ ও একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইবে। কিন্তু $x < 1$ এবং $y < 1$ $\therefore$ $x+y < 2.$; $\therefore$ $x+y$ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, $\therefore$ $x+y=1.$

$\therefore$ I = একটি যুগ্ম সংখ্যা $-$ 1 = একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

Ex. 14. *If n be a positive integer greater than unity, show that $4^{2n}-15n-1$ is always divisible by 225.*

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = (4^2)^n - 15n - 1 = 16^n - 15n - 1$$
$$= (1+15)^n - 15n - 1$$
$$= 1 + C_1.15 + C_2.15^2 + C_3.15^3 + \cdots - 15n - 1$$
$$= 1 + 15n + C_2.15^2 + C_3.15^3 + \cdots - 15n - 1$$
$$= C_2.15^2 + C_3.15^3 + \cdots$$

এখন, দক্ষিণ-পক্ষস্থিত প্রত্যেক পদই 15^2 দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore$ $4^{2n}-15n-1$ সতত 15^2 অর্থাৎ 225 দ্বারা বিভাজ্য।

Ex. 15. *If $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ are the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ where n is a positive integer, show that*

(i) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots + (n+1)C_n = 2^{n-1}(n+2).$

(ii) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \cdots + (2n+1)C_n = 2^n(n+1).$

(i) আমরা জানি, $C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n = 2^n.$

[§ 8·9 অনুসারে]

$$\therefore \quad C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots + (n+1)C_n$$
$$= (C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)$$
$$+ (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n)$$

$$=2^n+\left\{n+2\cdot\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\cdots+n\right\}$$
$$=2^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}+\cdots+1\right\}$$
$$=2^n+n(1+1)^{n-1}=2^n+n.2^{n-1}=2^{n-1}(n+2).$$

(ii) $C_0+3C_1+5C_2+7C_3+\cdots+(2n+1)C_n$
$$=C_0+2C_1+3C_2+4C_3+\cdots+(n+1)C_n$$
$$+C_1+2C_2+3C_3+\cdots+n.C_n$$
$$=2^{n-1}(n+2)+n.2^{n-1}$$ [পূর্ববর্তী (i) দেখ]
$$=2^{n-1}.2(n+1)=2^n(n+1).$$

Ex. 16. *If $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ are the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, prove that*

(i) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\cdots(C_{n-1}+C_n)$
$$=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}\cdot C_1C_2C_3\ldots\ldots C_n.$$

(ii) $C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_nC_0=\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}.$

(iii) $C_1^2+2C_2^2+3C_3^2+\cdots\cdots+n.C_n^2=\dfrac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\,\lfloor n-1}.$

(i) $C_{r-1}+C_r=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r+1}+\dfrac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\lfloor n\cdot\dfrac{r+n-r+1}{\lfloor r\,\lfloor n-r+1}$

$$=\frac{n+1}{n-r+1}\cdot\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}=\frac{n+1}{n-r+1}\cdot C_r.$$

এক্ষণে r-এর পরিবর্তে 1, 2, 3,.... n বসাইয়া আমরা পাই,

$$C_0+C_1=\frac{n+1}{n}\cdot C_1$$
$$C_1+C_2=\frac{n+1}{n-1}\cdot C_2$$
$$C_2+C_3=\frac{n+1}{n-2}\cdot C_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{n-1}+C_n=\frac{n+1}{1}\cdot C_n.$$

উভয়পক্ষ পৃথকভাবে গুণ করিয়া আমরা পাই

$$(C_0+C_1)(C_1+C_2)(C_2+C_3)\cdots(C_{n-1}+C_n)$$

$$=\frac{(n+1)^n}{n(n-1)(n-2)\cdots 1}\cdot C_1C_2C_3\ldots C_n$$

$$=\frac{(n+1)^n}{\underline{|n}}\cdot C_1C_2C_3\ldots C_n.$$

(ii) আমরা জানি $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n.$

এই অভেদে x-এর পরিবর্তে $\frac{1}{x}$ বসাইয়া আমরা পাই

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\cdots+\frac{C_n}{x^n}.$$

এখন, $C_r=C_{n-r}$. $\therefore$ r-এর মান 0, 1, 2, 3,........ বসাইয়া আমরা পাই

$$C_0=C_n,\ C_1=C_{n-1},\ C_2=C_{n-2},\ldots\ldots$$

$$\therefore\quad C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots C_n.C_0$$

$$=C_0^2+C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2.$$

ইহা উপরের $(1+x)^n$ এবং $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিদ্বয়ের গুণফলে x-মুক্ত পদের সহগ হইবে।

$\therefore$ ইহা $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ অর্থাৎ $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x-মুক্ত পদের সহগ হইবে।

আবার, $\frac{1}{x^n}(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x-মুক্ত পদের সহগ, $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-সংবলিত পদের সহগ হইবে।

এক্ষণে, $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-সংবলিত পদের সহগ

$$={}^{2n}C_n=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}.$$

$$\therefore\quad C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_nC_0=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}.$$

(iii) $C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots + n.C_nx^{n-1}$ $\quad\cdots\quad(1)$

$$= n + 2.\frac{n(n-1)}{2}x + 3.\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

$$= n\left\{1 + (n-1)x + \frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}x^2 + \cdots + x^{n-1}\right\}$$

$$= n(1+x)^{n-1}.$$

আবার, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \frac{C_3}{x^3} + \cdots + \frac{C_n}{x^n}$ $\quad\cdots\quad(2)$

এক্ষণে, $C_1{}^2 + 2C_2{}^2 + 3C_3{}^2 + \cdots + n.C_n{}^2$

= (1) ও (2)-এ লিখিত রাশিমালার গুণফলে $\frac{1}{x}$ এর সহগ

$= n(1+x)^{n-1}.\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর গুণফলে $\frac{1}{x}$-এর সহগ

$= \frac{n}{x^n}(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতিতে $\frac{1}{x}$ এর সহগ

অর্থাৎ $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{n-1} এর সহগের n গুণ

$$= n.{}^{2n-1}C_{n-1} = \frac{n\,\underline{|2n-1}}{\underline{|n}\;\underline{|n-1}} = \frac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n-1}}.$$

Ex. 17. (*i*) *If in the expansion of* $(a+x)^n$, *A be the sum of the odd terms and B the sum of the even terms, show that*

$$A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n.$$

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলি $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ দ্বারা সূচিত কর। তাহা হইলে, $(a+x)^n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n = A + B$

এবং $(a-x)^n = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + \cdots + (-1)^n t_n$

$$= (t_0 + t_2 + t_4 + \cdots) - (t_1 + t_3 + t_5 + \cdots)$$
$$= A - B.$$

$\therefore\quad (A+B)(A-B) = (a+x)^n(a-x)^n$

অর্থাৎ, $A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n.$

(ii) If $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots, t_n$ denote the successive terms in the expansion of $(a+x)^n$, show that

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2 = (a^2 + x^2)^n.$$

$$(a+x)^n = C_0 a^n + C_1 a^{n-1} x + C_2 a^{n-2} x^2 + C_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 + \cdots + C_n x^n$$

$$= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \cdots + t_n.$$

এখন উভয়পক্ষে x-এর স্থলে ix বসাইলে

$$(a+ix)^n = a^n + C_1 a^{n-1} ix + C_2 a^{n-2} i^2 x^2 + C_3 a^{n-3} i^3 x^3 + C_4 a^{n-4} i^4 x^4 + C_5 a^{n-5} i^5 x^5 + \cdots$$

$$= a^n + iC_1 a^{n-1} x - C_2 a^{n-2} x^2 - iC_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 + C_5 a^{n-5} ix^5 + \cdots$$

$$= t_0 + it_1 - t_2 - it_3 + t_4 + it_5 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)$$

$$= A + iB, \quad [\text{ যখন } A = t_0 - t_2 + t_4 - \cdots$$

$$\text{এবং } B = t_1 - t_3 + t_5 - \cdots] \qquad \cdots \quad (1)$$

আবার, $$(a-ix)^n = a^n - C_1 a^{n-1} ix + C_2 a^{n-2} i^2 x^2 - C_3 a^{n-3} i^3 x^3 + C_4 a^{n-4} i^4 x^4 - C_5 a^{n-5} i^5 x^5 + \cdots$$

$$= a^n - i.C_1 a^{n-1} x - C_2 a^{n-2} x^2 + iC_3 a^{n-3} x^3 + C_4 a^{n-4} x^4 - iC_5 a^{n-5} x^5 - \cdots$$

$$= t_0 - it_1 - t_2 + it_3 + t_4 - it_5 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)$$

$$= A - iB. \qquad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) গুণ করিয়া আমরা পাই

$$(a+ix)^n \times (a-ix)^n = (A+iB)(A-iB),$$

অর্থাৎ $$\{(a+ix)(a-ix)\}^n = A^2 + B^2,$$

অর্থাৎ $$(a^2+x^2)^n = (t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2.$$

Ex. 18. *Prove that the expansion of $(1-x^3)^n$ may be put into the form* $(1-x)^{3n}+3nx(1-x)^{3n-2}$

$$+\frac{3n(3n-3)}{1.2}x^2(1-x)^{3n-4}+\cdots,$$

আমরা জানি $1-x^3=(1-x)^3+3x(1-x)$.

$$\therefore\quad (1-x^3)^n=\{(1-x)^3+3x(1-x)\}^n$$

$$=\{(1-x)^3\}^n+n\{(1-x)^3\}^{n-1}.3x(1-x)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.\{(1-x)^3\}^{n-2}.\{3x(1-x)\}^2+\cdots\cdot$$

$$=(1-x)^{3n}+n.(1-x)^{3n-3}.3x(1-x)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}.(1-x)^{3n-6}.3^2x^2(1-x)^2+\cdots\cdot$$

$$=(1-x)^{3n}+3nx(1-x)^{3n-2}$$

$$+\frac{3n(3n-3)}{1.2}.x^2(1-x)^{3n-4}+\cdots\cdot.$$

Ex. 19. *If n_r represents the coefficient of the $(r+1)th$ term in the expansion of $(1+x)^n$, prove that*

$$(m+n)_r=m_r+m_{r-1}.n_1+m_{r-2}.n_2$$

$$+m_{r-3}.n_3+\cdots\cdot+m_1.n_{r-1}+n_r.$$

যেহেতু, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ n_r, সুতরাং, $(1+x)^m$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ m_r.

$$\therefore\quad (1+x)^m=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots\cdot+m_{r-1}x^{r-1}$$

$$+m_r.x^r+\cdots\cdot$$

$$(1+x)^n=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots\cdot+n_{r-1}x^{r-1}$$

$$+n_r.x^r+\cdots\cdot$$

এবং $(1+x)^{m+n}=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots\cdot$

$$+(m+n)_r.x^r+\cdots\cdot$$

কিন্তু $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m\times(1+x)^n$.

$$\therefore \quad 1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\dots +(m+n)_rx^r+\cdots$$

$$=(1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_{r-1}x^{r-1}+m_rx^r+\cdots)$$
$$\times(1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots+n_{r-1}x^{r-1}+n_rx^r+\cdots).$$

যেহেতু ইহা একটি অভেদ, উভয় পক্ষের x^r-এর সহগ সমিত করিয়া আমরা পাই

$$(m+n)_r=m_r+m_{r-1}.n_1+m_{r-2}.n_2+m_{r-3}n_3+\cdots +m_1n_{r-1}+n_r.$$

Examples VIII

1. Expand the following binomials :—

(i) $(x+2y)^5$. (ii) $(2x+3)^5$. (iii) $(a+x)^7$.

(iv) $(a-x)^6$. (v) $(1-2y)^5$. (vi) $\left(3x+\frac{y}{3}\right)^5$.

(vii) $\left(2-\frac{a}{2}\right)^7$. (viii) $\left(ax+\frac{y}{a}\right)^9$.

2. Give an independent proof of the expansion of $(1+x)^n$ following the alternative method of § 8·2.

3. Find (i) the 5th term in the expansion of $(1+2x)^{10}$.

(ii) the 9th term of $(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b)^{12}$.

(iii) the 6th term of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

(iv) the middle term of $\left(\frac{2a}{3}-\frac{3}{2a}\right)^{10}$.

(v) the 6th term of $\left(3x+\frac{a}{2}\right)^9$.

4. Find the 8th term of $(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}})^{10}$.

5. Write the coeff. of x^{-20} in $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2}{x^3}\right)^2$

6. Find the $(n+1)$th term in the expansion of $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{3n}$.

7. Expand $(1 + \sqrt{1-x^2})^5 + (1 - \sqrt{1-x^2})^5$.

8. Find the value of $(x + \sqrt{2})^6 + (x - \sqrt{2})^6$.

9. Find the coeff. of x in $\left(x^2 - \frac{2a}{x}\right)^{14}$.

10. Find the coeff. of x^{16} in the expansion of $(2x^2 - x)^{10}$.

11. Expand $(1 - 2x + 2x^2)^{10}$ upto 3rd term in ascending powers of x.

12. Find first four terms of the expansion of $(1 - x + x^2)^n$ in ascending powers of x.

13. Find the coeff. of x^4 in $(1 + x + x^2 + x^3)^n$.

14. Find the coeff. of x^{10} in $(1 + x + x^2)(1 - x)^{15}$.

15. Find the coeff. of $x^{-(2m+1)}$ in the expansion of

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{[illegible]}$$

16. Find the two middle terms of $(a + x)^{2n+1}$.

17. Find the middle term in the expansion of

$$(1 - 2x + x^2)^n.$$

18. Find the term independent of x in the expansions of

(i) $\left(ax^5 - \frac{b}{x^2}\right)^{35}$, (ii) $\left(6x + \frac{1}{3x^2}\right)^9$, (iii) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{2n}$,

(iv) $(x^2 + 2x^{-1})^{12}$.

19. If there is a term independent of x in $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$, show that it is $\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{3}n \lfloor \frac{2}{3}n}$.

20. If x^p occurs in the expansion of $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$, show that its coeff. is $\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-p) \lfloor \frac{1}{2}(n+p)}$.

21. If the rth term in the expansion of $(1+x)^{30}$ has its coefficient equal to that of the $(r+4)$th term, find r.

22. Show that the coefficient of the middle term of $(1+x)^{2n}$ is equal to the sum of the coefficients of the two middle terms of $(1+x)^{2n-1}$.

23. If in the expansion of $(1+x)^{50}$ the coefficient of the $(3r+1)$th term be equal to the coefficient of the $(4r+2)$th term, find r.

24. In the expansion of $(1+x)^{m+n}$, where m and n are positive integers, prove that the coefficients of x^m and x^n are equal.

25. If in the expansion $(1+x)^{2n+1}$ the coefficients of x^r and x^{r+1} are equal, find r.

26. If C_0, C_1, $C_2, \ldots, C_n$ denote the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, prove that

$$C_1+2C_2+3C_3+4C_4+\cdots+nC_n=n.2^{n-1}.$$

27. If the coefficients of the second, third and fourth terms in the expansion of $(1+x)^n$ be in A.P., find n.

28. (i) If a, b, c be three consecutive coefficients in the expansion of power of $(1+x)$, prove that index of the power is $\dfrac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ and the number of the terms of which a is the coefficient, is $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$.

(ii) If a_1, a_2, a_3, a_4 be any consecutive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, show that

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

29. Show that the sum of the coefficients of odd terms in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is 2^{2n-1}.

30. The third, fourth and fifth terms in the expansion of $(x+a)^n$ are 84, 280 and 560 respectively ; find x, a, n.

31. If P_n denotes the product of all the coeff. in the expansion of $(1+x)^n$ where n is a positive integer, show that

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$

32. If a, b, c, d be 3rd, 4th, 5th and 6th terms in the expansion of $(x+y)^n$, where n is a positive integer, show that

$$\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}.$$

33. In the expansion of $(1+x)^{44}$, the coefficient of the $(4r+3)$th term is equal to that of the $(2r-5)$th term, find r.

34. In the following examples find which is the greatest term :

(i) $(7x+2y)^{30}$, when $x=8$, $y=14$.

(ii) $\left(1+\frac{2x}{27}\right)^{16}$, when $x=3$.

(iii) $(2x-3y)^{28}$, when $x=9$, $y=4$.

35. Show that the greatest term in the expansion of $(1+x)^{2n+1}$ has also the greatest coefficient if x lies between $\frac{n}{n+2}$ and $\frac{n+2}{n}$.

36. If two successive coefficients of an expanded binomial be equal, prove that the two coefficients immediately preceding and succeeding them are equal.

37. Prove that the difference between the coefficients of x^{r+1} and x^r in the expansion of $(1+x)^{n+1}$ is equal to the difference between the coefficients of x^{r+1} and x^{r-1} in the expansion of $(1+x)^n$.

38. Find the rth term from the beginning and the rth term from the end in the expansion of $(1+2x)^n$.

39. If $C_0, C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots, C_n$ denote the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, prove that

(i) $C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{4} + \cdots\cdots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

(ii) $\frac{C_0}{1} + \frac{C_2}{3} + \frac{C_4}{5} + \frac{C_6}{7} + \cdots\cdots = \frac{2^n}{n+1}$.

(iii) $C_0 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{4} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

(iv) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1} nC_n = 0$.

(v) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots\cdots + C_n^2 = \frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$.

(vi) $C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \cdots\cdots + (-1)^n C_n^2 = 0$,

or, $(-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\underline{|n}}{\left(\underline{|\frac{1}{2}n}\right)^2}$ according as n is odd or even.

(vii) $(C_0 + C_1 + C_2 + \cdots\cdots + C_n)^2 = {}^{2n}C_0 + {}^{2n}C_1$
$+ {}^{2n}C_2 + \cdots + {}^{2n}C_{2n}$.

(viii) $2C_0 + \frac{2^2 C_1}{2} + \frac{2^3 C_2}{3} + \frac{2^4 C_3}{4} + \cdots\cdots + \frac{2^{n+1} C_n}{n+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

(ix) $\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + \cdots\cdots + \frac{nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$.

(x) $C_0 + \frac{1}{2}C_1^2 + \frac{1}{3}C_2^2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1}C_n^2 = \frac{\underline{|2n+1}}{(\underline{|n+1})^2}$.

40. Show that

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = C_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + C_1\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right)$$
$$+ C_2\left(x^{n-4} + \frac{1}{x^{n-4}}\right) + \cdots\cdots,$$ and give the last term.

41. Show that

$$\left(\frac{1+x}{1-2x}\right)^n = C_0 + C_1 \frac{3x}{1-2x} + C_2\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^2 + \cdots + C_r\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^r$$
$$+ \cdots + C_n\left(\frac{3x}{1-2x}\right)^n.$$

42. If n is a positive integer, prove that

$$1 - C_1 \cdot \frac{1+x}{1+nx} + C_2 \cdot \frac{1+2x}{(1+nx)^2} - C_3 \cdot \frac{1+3x}{(1+nx)^3} + \cdots = 0.$$

43. Prove that

$$(1+x)^{2n} - 2nx(1+x)^{2n-1} + \frac{2n(2n-2)}{2\,!} x^2(1+x)^{2n-2}$$
$$- \frac{2n(2n-2)(2n-4)}{3\,!} x^3(1+x)^{2n-3}$$
$$+ \cdots \text{to } (n+1) \text{ terms} = (1-x^2)^n.$$

44. If $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, show that

(i) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_{2n} = 3^n$;

(ii) $a_0 - a_1 + a_2 - \cdots\cdots + a_{2n} = 1.$

45. Apply Binomial theorem to find the value of

(i) $(98)^4$. (ii) $(\cdot 999)^4$ correct to 3 places of decimals.

46. Prove that $2^{5n} - 31n - 1$ is divisible by 961 for all positive integral values of n greater than 1.

ANSWERS

1. (i) $x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$.

(ii) $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$.

(iii) $a^7 + 7a^6x + 21a^5x^2 + 35a^4x^3 + 35a^3x^4 + 21a^2x^5 + 7ax^6 + x^7$.

(iv) $a^6 - 6a^5x + 15a^4x^2 - 20a^3x^3 + 15a^2x^4 - 6ax^5 + x^6$.

(v) $1 - 10y + 40y^2 - 80y^3 + 80y^4 - 32y^5$.

(vi) $243x^5 + 135x^4y + 30x^3y^2 + \frac{10}{3}x^2y^3 + \frac{5}{27}xy^4 + \frac{y^5}{243}$.

(vii) $128 - 224a + 168a^2 - 70a^3 + \frac{35}{2}a^4 - \frac{21}{8}a^5 + \frac{7}{32}a^6 - \frac{a^7}{128}$.

(viii) $a^9x^9 + 9a^7x^8y + 36a^5x^7y^2 + 84a^3x^6y^3 + 126ax^5y^4$

$+ 126\frac{x^4y^5}{a} + 84\frac{x^3y^6}{a^3} + 36\frac{x^2y^7}{a^5} + 9\frac{xy^8}{a^7} + \frac{y^9}{a^9}$.

3. (i) $3360x^4$. (ii) $\frac{55}{2304}a^4b^8$. (iii) -252. (iv) -252.

(v) $42a^5x^4$. 4. $-120a^8b^{12}$. 5. ${}^{25}C_{14}2^{14}3^{-11}$.

6. $(-1)^n \dfrac{\lfloor 3n}{\lfloor n \lfloor 2n} x^n$. 7. $2(5x^4-20x^2+16)$. 8. $2(x^6+30x^4+60x^2+8)$.

9. $-1025024a^9$. 10. 13440. 11. $1-20x+20x^2$.

12. $1-nx+\dfrac{n(n+1)}{2}x^2-\dfrac{n(n-1)(n+4)}{6}x^3$.

13. $\dfrac{n(n-1)(n^2+7n+18)}{24}$. 14. 4433. 15. $-\dfrac{\lfloor 2n-1}{\lfloor 2(n-m) \lfloor 2m+1}$.

16. $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} a^{n+1}x^n$ and $\dfrac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n \lfloor n+1} \cdot a^n x^{n+1}$. 17. $\dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n} (-1)^n x^n$.

18. (i) $-{}^{35}C_{25}a^{10}b^{25}$. (ii) 145152.

(iii) $\dfrac{\lfloor 2n}{(\lfloor n)^2}$. (iv) 126720.

21. 14. 23. 7. 25. n. 27. 7. 30. $x=1, a=2, n=7$. 33. 8.

34. (i) 11th term. (ii) 4th term. (iii) 12th term.

38. $\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1} 2^{r-1} x^{r-1}$;

$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{\lfloor r-1} 2^{n-r+1} x^{n-r+1}$.

40. $\dfrac{\lfloor n}{(\lfloor \frac{1}{2}n)^2}$ when n is even,

$\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}n+1 \lfloor \frac{1}{2}(n-1)} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ when n is odd.

45. 92236816. (ii) ·996.

নবম অধ্যায়

অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য

(Infinite Geometric Series and Binomial Theorem for fractional or negative index)

9·1. অসীম গুণোত্তর শ্রেণী (Infinite Geometric Series)। যে শ্রেণীর পদসংখ্যা সীমায়িত নয়, বস্তুতপক্ষে সংখ্যাতীত, তাহাই **অসীম শ্রেণী** নামে অভিহিত। অসীম শ্রেণী গণিতশাস্ত্রে একটি বিশিষ্ট স্থান অধিকার করিয়া আছে বলিয়া ইহার সহিত কিছু পরিচয় বাঞ্ছনীয়। অনেক অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সমষ্টি অসীম। আরও বহুপ্রকার শ্রেণী আছে, যেগুলির পদসংখ্যা অসীম এবং তাহাদের সমষ্টিও অসীম। কিন্তু কোন কোন ক্ষেত্রে অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর এবং আরও অনেক প্রকার অসীম শ্রেণীর সমষ্টি সসীম। এই অধ্যায়ে আমরা অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং দ্বিপদরাশির বিস্তৃতি কোন্ কোন্ ক্ষেত্রে সসীম সমষ্টিবিশিষ্ট অসীম শ্রেণীতে পরিণত হয়, তৎসম্বন্ধে আলোচনা করিব।

প্রথমে আমরা $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\ldots$ এই গুণোত্তর শ্রেণীটি লইয়া আলোচনা আরম্ভ করিব।

এই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}.$

ইহা হইতে প্রতীয়মান হয় যে, n যতই বৃহৎ হউক না কেন অর্থাৎ পদসংখ্যা যত বেশী হউক না কেন এই শ্রেণীর সমষ্টি সতত 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ সসীম। n ক্রমাগত বর্ধিত করিলে $\frac{1}{2^{n-1}}$ এই ভগ্নাংশের মান ক্রমাগত হ্রাস পাইতে থাকে এবং এই মান ইচ্ছামত আমরা হ্রাস করিতে পারি। মনে কর, n যখন 10, তখন $\frac{1}{2^{n-1}}$ এর মান $\frac{1}{2^9}$ এবং n যখন 11, তখন $\frac{1}{2^{n-1}}$ এর মান $\frac{1}{2^{10}}$ অর্থাৎ $\frac{1}{2^n}$ এর $\frac{1}{2}$. সুতরাং, $\frac{1}{2^{10}}$ এর মান $\frac{1}{2^9}$ এর মানের অর্ধেক বলিয়া নিশ্চয়ই $\frac{1}{2^9}$

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এই শ্রেণীর যথেষ্ট-সংখ্যক পদ লইয়া আমরা 2 এবং এই শ্রেণীর সমষ্টির পার্থক্য $\frac{1}{2^{n-1}}$ কে যে-কোন (প্রদত্ত) ক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করিতে পারি।

অতএব, এই অসীম শ্রেণীর সমষ্টি 2 করা যাইতে পারে এবং তাহাতে যে ভুল হয়, তাহা নিতান্তই নগণ্য।

অসীম শ্রেণীসমূহের প্রকৃতি-অনুসারে তাহারা সাধারণতঃ তিন ভাগে বিভক্ত, (1) **অভিসারী** (convergent), (2) **অপসারী** (divergent) এবং (3) **দোলায়মান** (oscillatory বা periodic convergent)।

(1) কোন শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, n অসীম হইলেও, যদি কোন নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা অতিরিক্ত না হয়, তবে সেই শ্রেণীকে **অভিসারী অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

(2) n-এর মান ইচ্ছামত বর্ধিত করিয়া কোন শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যে-কোন নির্দিষ্ট রাশি অপেক্ষা যদি বৃহত্তর করা যায়, তবে সেই শ্রেণীকে **অপসারী অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $1+2+3+4+5+6+\cdots\infty$ পর্যন্ত।

(3) আবার, কোন শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি n-এর মান অনুযায়ী দুইটি রাশির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে, তখন শ্রেণীটিকে **দোলায়মান অসীম শ্রেণী** বলে। যেমন, $a, -a, a, -a, a, -a \cdots\infty$ পর্যন্ত। এই শ্রেণীটির বৈশিষ্ট্য ইহার যুগ্মসংখ্যক পদের সমষ্টি 0 এবং অযুগ্মসংখ্যক পদের সমষ্টি a.

আবার, এমন বহুপ্রকার শ্রেণী আছে, যাহাদের প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের কোন পদ্ধতি আমাদের জানা নাই। সেই সকল শ্রেণী অভিসারী কি অপসারী তাহা নির্ণয়ের পদ্ধতি উচ্চ-মাধ্যমিক পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া তাহা আর এখানে আলোচিত হইল না। তবে, কোন অসীম শ্রেণী অভিসারী কি অপসারী, তাহা নির্ণয় করিবার একটি নিয়ম এখানে উল্লেখমাত্র করা হইল।

যদি কোন অসীম শ্রেণীর পদগুলি পর্যায়ক্রমে একটি ধনাত্মক এবং একটি ঋণাত্মক (alternately positive and negative) হয় এবং সাংখ্যমান হিসাবে প্রত্যেক পদ পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে শ্রেণীটি অভিসারী হইবে।

আমরা এখন সাধারণ গুণোত্তর শ্রেণী $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \cdots$ এর সমষ্টির বিষয় আলোচনা করিব। এই শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S ধরিলে r-এর সাংখ্যমান যদি < 1 হয়, তবে পূর্বে দেখান হইয়াছে

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

r-এর সাংখ্যমান < 1 হইলে, n যত বৃহৎ হইবে, r^n এবং সঙ্গে সঙ্গে $\frac{ar^n}{1-r}$ তত ক্ষুদ্র হইবে এবং n যথেষ্ট পরিমাণে বর্ধিত করিয়া এই শ্রেণীর n পদের সমষ্টির সহিত $\frac{a}{1-r}$ এর পার্থক্য ইচ্ছামত কম করিতে পারি। অর্থাৎ $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$ গুণোত্তর শ্রেণীটি অসীম হইলে r-এর সাংখ্যমান যদি < 1 হয়, তবে ইহার সমষ্টি $\frac{a}{1-r}$ এর সমান হইবে।

$$\therefore \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \infty \text{ পর্যন্ত} = \frac{a}{1-r} \cdot (-1 < r < 1) \quad \text{(A)}$$

আবৃত্ত দশমিক (recurring decimal) অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর প্রকৃষ্ট উদাহরণ। একটি দৃষ্টান্ত হইতে বিষয়টি পরিষ্কার বুঝা যাইবে।

$$\cdot 5\dot{3}\dot{4} = \cdot 534343434\ldots\ldots$$
$$= \cdot 5 + \cdot 034 + \cdot 00034 + \cdot 0000034 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{34}{1000} + \frac{34}{100000} + \frac{34}{10000000} + \cdots$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \frac{34}{10^9} + \cdots$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots\right)$$
$$= \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{5}{10} + \frac{34}{10^3} \times \frac{100}{99} = \frac{5}{10} + \frac{34}{990}$$
$$= \frac{495 + 34}{990} = \frac{529}{990}.$$

এই ভগ্নাংশ পাটীগণিতের সাধারণ নিয়মানুসারে লব্ধ ভগ্নাংশের সহিত অভিন্ন।

দ্রষ্টব্য 1. "r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা কম"—এই উক্তি অনেক সময় "$|r| < 1$" বা "$-1 < r < 1$" এই প্রতীকচিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। স্পষ্টতঃই এখানে r কোন সময়ই 0 হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য 2. $-1 < r < 1$ এবং n অসীম হইলে, r^n শূন্য হয়।

যে সকল অসীম গুণোত্তর শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত 1-এর সাংখ্যমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, কেবলমাত্র সেই সকল অসীম শ্রেণীর সমষ্টি নির্ণয়যোগ্য একটি সসীম রাশি ; কিন্তু সাধারণ অনুপাত 1-এর সাংখ্যমান অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঐ অসীম শ্রেণীগুলির সমষ্টি সসীম হইবে না, অসীম হইবে।

9·2. ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for fractional or negative index).

x-এর সাংখ্যমান মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং n একটি ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}x^4+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|5}}x^5+\cdots\infty \text{ পর্যন্ত।} \quad (1)$$

দ্বিপদ উপপাদ্যে, সূচক n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে ইহার প্রমাণ পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া এখানে দেওয়া হইল না। n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি এবং n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে আপাত কোন পার্থক্য লক্ষিত না হইলেও দুই-একটা বড় রকমের পার্থক্য আছে তাহা শিক্ষার্থীদের স্মরণ রাখা বিশেষ প্রয়োজন।

n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি আমরা ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$,....${}^nC_r$ প্রভৃতি প্রতীকদ্বারা সূচিত করিতে পারি। কিন্তু, n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগগুলি এই সকল প্রতীকদ্বারা আমরা কখনই প্রকাশ করিতে পারি না। সুতরাং, n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ বা $(r+1)$-তম পদ ${}^nC_rx^r$ দ্বারা সূচিত করা যাইবে না। এই ক্ষেত্রে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ বা সাধারণ পদ লিখিতে উহা t_{r+1} দ্বারা সূচিত করিয়া সহগটি সম্পূর্ণরূপে লিখিতে হয়।

∴ $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ বা t_{r+1}

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r,$$ **যখন n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক।**

এই সাধারণ পদের লবের অন্তর্গত পদ-সংখ্যা-নির্দেশক r সতত একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা। অতএব, n ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হইলে $n-r+1$ কখনও শূন্য হইতে পারে না। সুতরাং, এই ক্ষেত্রে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা অসীম অর্থাৎ এই বিস্তৃতি একটি অসীম শ্রেণী। কিন্তু n একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যা হইলে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $(n+1)$ অর্থাৎ সসীম হইবে।

আবার, n যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয় তবে $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে x-এর মান যাহাই হউক না কেন (সসীম), পদ-সংখ্যা সসীম বলিয়া ডান পক্ষ সমান বাম পক্ষ হয়। কিন্তু n যদি ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হয়, তবে পদ-সংখ্যা অসীম বলিয়া x-এর মান যেমন ইচ্ছা লওয়া চলিবে না। x-এর মান এমনভাবে লইতে হইবে যে, বাম পক্ষ যেন একটি অভিসারী অসীম শ্রেণী হয়। দেখা গিয়াছে, (প্রমাণ পাঠ্য-বহির্ভূত বলিয়া দেওয়া হইল না, যে কোন উচ্চতর বীজগণিত দ্রষ্টব্য) x-এর সাংখ্যমান যদি -1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর $(-1 < x < 1)$ হয়, তবে বিস্তৃতির ডান পক্ষ সমান বাম পক্ষ থাকে। একটি উদাহরণযোগে বিষয়টি বিশদ করা হইল। উপরে (1)-এ $n=-1$ ও $x=-x$ বসাইলে,

$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\infty$ পর্যন্ত [See § 9·3 (5)]

এখন যদি $x=\frac{1}{2}$ হয়, (B)

ডান পক্ষ $=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\infty$ পর্যন্ত

$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ [See § 9·1 (A)]

বাম পক্ষ $=(1-\frac{1}{2})^{-1}=2$

কিন্তু $x=2$ বসাইলে,

ডান পক্ষ $=1+2+2^2+2^3+\cdots\infty$ পর্যন্ত

>1

বাম পক্ষ $=(1-2)^{-1}=-1<1$,

আবার, $x=1$ (B)-তে বসাইলে,

$\frac{1}{0}=1+1+1+1+\cdots\infty$ পর্যন্ত,

এবং $x=-1$ বসাইলে,

$\frac{1}{2}=1-1+1-1+1-1+\cdots$

বলা বাহুল্য ডান পক্ষ একটি দোলায়মান (0 ও 1-এর মধ্যে) অসীম শ্রেণী এবং কোন ক্ষেত্রেই উহার মান $\frac{1}{2}$ নয়। সেজন্য n যখন ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হয়

তখন x-এর মান 1 এবং -1-এর মধ্যে না থাকিলে ডানপক্ষের অসীম শ্রেণী বামপক্ষের দ্বিপদের সহিত মিলিবে না। সুতরাং, এ-বিষয়ে ছাত্রগণকে যথেষ্ট সাবধানতা অবলম্বন করিতে হইবে।

9·3. কতকগুলি প্রয়োজনীয় বিস্তৃতিঃ ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা কতকগুলি প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি পাই। নিম্নে সেগুলি দেওয়া হইল। অনেক প্রশ্নের সমাধানে এগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়। সেইজন্য এগুলির সহিত শিক্ষার্থীদের পরিচয় বাঞ্ছনীয়।

1. $$(1-x)^n = 1 + n(-x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} \cdot (-x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r + \cdots\cdots \infty$$ পর্যন্ত।

$$= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ **পর্যন্ত।**

2. $$(1+x)^{-n} = 1 + (-n)x + \frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{-n(-n-1))(-n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ পর্যন্ত।

$$= 1 - nx + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots + (-1)^r \cdot \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r + \cdots \infty$$ **পর্যন্ত।**

3. $(1-x)^{-n}=1+(-n)(-x)+\frac{-n(-n-1)}{\underline{|2}}(-x)^2$

$$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\underline{|3}}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$+\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots$$

$+(-1)^{2r}.\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\ \infty$ পর্যন্ত।

$$=\mathbf{1+nx+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\underline{|3}}x^3}$$

$\mathbf{+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots\ \infty}$ **পর্যন্ত।**

4. $(1+x)^{-1}=1+(-1)x+\frac{-1(-1-1)}{\underline{|2}}.x^2$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots$$

∞ পর্যন্ত।

$\mathbf{=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^r x^r+\cdots\cdots\ \infty}$ **পর্যন্ত।**

5. $(1-x)^{-1}=1+(-1)(-x)+\frac{-1(-1-1)}{\underline{|2}}(-x)^2$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)}{\underline{|3}}(-x)^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{-1(-1-1)(-1-2)\cdots(-1-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r+\cdots$$

∞ পর্যন্ত।

$\mathbf{=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\ \infty}$ **পর্যন্ত।**

দ্রষ্টব্য। (4) এবং (5)-এর বিস্তৃতিদ্বয় দুইটি অসীম গুণোত্তর শ্রেণী এবং ইহাদের সাধারণ অনুপাত যথাক্রমে $-x$ এবং $+x$.

6. $(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{-2(-2-1)}{\lfloor 2} x^2$

$+ \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3} x^3 + \cdots\cdots$

$+ \frac{-2(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-r+1)}{\lfloor r} x^r + \cdots \infty$ পর্যন্ত

$= 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^r.(r+1)x^r + \cdots \infty$ **পর্যন্ত।**

7. $(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \frac{-2(-2-1)}{\lfloor 2} (-x)^2$

$+ \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{\lfloor 3} (-x)^3 + \cdots\cdots$

$+ \frac{-2(-2-1)(-2-2)\cdots(-2-r+1)}{\lfloor r} (-x)^r + \cdots \infty$ পর্যন্ত

$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (r+1)x^r + \cdots\cdots \infty$ **পর্যন্ত।**

8. $(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots\cdots$

$+ \frac{1}{2}(r+1)(r+2)x^r + \cdots\cdots \infty$ **পর্যন্ত।**

9. $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})x + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2} x^2$

$+ \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3} x^3 + \cdots\cdots$

$+ \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r} x^r + \cdots \infty$ পর্যন্ত।

$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4} x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} x^3 + \cdots\cdots$

$+ (-1)^r \frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r} x^r + \cdots \infty$ **পর্যন্ত।**

10. $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + (-\frac{1}{2})(-x) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2} (-x)^2$

$+ \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3} (-x)^3 + \cdots\cdots$

$+ \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r} (-x)^r + \cdots \infty$ পর্যন্ত

$$1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2^2\lfloor 2}x^2+\frac{1.3.5}{2^3\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{2r}\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2^r\lfloor r}x^r+\cdots\ \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1+\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{1.4.6}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r}x^r+\cdots\ \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

দ্রষ্টব্য। $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ বিস্তৃতিটিকে দ্বিপদ উপপাদ্য দ্বারা বিস্তৃত করিয়া সরলকরণান্তে আমরা পাই,

$$1+p\cdot\frac{x}{q}+\frac{p(p+q)}{2\,!}\cdot\frac{x^2}{q^2}+\frac{p(p+q)(p+2q)}{3\,!}\cdot\frac{x^3}{q^3}+\cdots\cdots$$

9·3(A). $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি (n ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে)। n যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা না হয় এবং যদি $|x|<a$ বা $>a$ হয়, তাহা হইলে $(a+x)^n$-কে যথাক্রমে $\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$ বা $\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$ এই আকারে লিখিতে হইবে এবং তারপর বিস্তৃত করিতে হইবে।

(1) মনে কর, $x<a$; তাহা হইলে $x/a<1$.

$$\therefore\quad (a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$=a^n\left\{1+n\cdot\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{2\,!}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=a^n+n.a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2\,!}a^{n-2}x^2+\cdots$$

(2) মনে কর, $x>a$; তাহা হইলে $a/x<1$.

$$\therefore\quad (a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$$

$$=x^n\left\{1+n\cdot\frac{a}{x}+\frac{n(n-1)}{2\,!}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=x^n+n.x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2\,!}x^{n-2}a^2+\cdots$$

9·4. দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ (Application of Binomial Theorem)।

Ex. 1. *Find the first three terms in the expansion of*

$$(1+2x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

প্রদত্ত দ্বিপদদ্বয়ের x^2-সংবলিত পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় করিয়া আমরা পাই

প্রদত্ত রাশিমালা $=(1+x-\frac{1}{2}x^2+\cdots)(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots)$

$$=1+x(1+\tfrac{1}{2})+x^2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{2})+\cdots\cdots$$

$$=1+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{8}x^2.$$

উপরের উদাহরণে $x=\cdot 002$ হইলে $x^2=\cdot 000004$ এবং বিস্তৃতির তৃতীয় পদ দশমিক বিন্দুর পর পাঁচটি শূন্য দিয়া আরম্ভ বলিয়া প্রথম অথবা দ্বিতীয় পদের তুলনায় অতীব ক্ষুদ্র।

সুতরাং, $x=\cdot 002$ হইলে আমাদের যদি এই বিস্তৃতির সাংখ্যমান আসন্ন পঞ্চম দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিতে হয়, তবে এই বিস্তৃতির x^2-সংবলিত পদ বর্জন করিয়া $1+\frac{3}{2}x$-এ x-এর মান $\cdot 002$ বসাইলেই চলে।

Ex. 2. *Find the cube root of 126 to 5 places of decimals.*

নির্ণেয় ঘনমূল $=126^{\frac{1}{3}}=(5^3+1)^{\frac{1}{3}}=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots\cdots$$

$$=5+\frac{\cdot 04}{3}-\frac{\cdot 00032}{9}+\frac{\cdot 0000128}{81}-\cdots\cdots$$

$$=5+\cdot 013333-\cdot 000035\cdots+\cdot 0000001\cdots-\cdots\cdots$$

$=5\cdot 01329$ পাঁচ দশমিক [illegible]ন্ত।

9.5. বৃহত্তম পদ (Greatest Term)। দ্বিপদ উপপাদ্যে সূচক n একটি ধনাত্মক অখণ্ড রাশি হইলে যে পদ্ধতিতে ইহার বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ স্থির করা হইয়াছে, সূচক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হইলে সেই একই পদ্ধতিতে

বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ স্থির করা হইয়া থাকে। সেইজন্য পুনরায় আর তাহা প্রদর্শিত হইল না। কোন বিশেষ ক্ষেত্রে কিরূপে ঐ পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় তাহা নিম্নে দেখানো হইল।

Ex. *Which is the numerically greatest term in the expansion of* $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$ *when* $x=\frac{1}{8}$?

এখানে, আমাদের চিহ্ন-বিবর্জিত পরম সাংখ্যমান স্থির করিতে হইবে। মনে কর, $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$-এর বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ যথাক্রমে t_r, t_{r+1}.

$$\therefore \quad \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{-\frac{11}{4}-r+1}{r}\cdot\left(-7x\right)=\frac{(4r+7)}{4r}\cdot\frac{7}{8}=\frac{28r+49}{32r}.$$

$\therefore \quad t_{r+1} > =$ অথবা $< t_r$, হইবে,

যতক্ষণ $28r+49 > =$ অথবা $< 32r$

অর্থাৎ, $t_{r+1} > =$ অথবা $< t_r$ হইবে,

যতক্ষণ $32r < =$ অথবা $> 28r+49$

অর্থাৎ, $t_{r+1} > =$ অথবা $< t_r$ হইবে, যতক্ষণ $4r < =$ অথবা > 49

অর্থাৎ, $r < =$ অথবা $> 12\frac{1}{4}$.

r পদ-সংখ্যা-নির্দেশক বলিয়া ইহার মান সতত একটি অখণ্ড রাশি, $12\frac{1}{4}$ হইতে পারে না।

সুতরাং, r-এর 12 পর্যন্ত সকল মানের জন্য $t_{r+1} > t_r$ এবং r যখন 12 অপেক্ষা বৃহত্তর এক অখণ্ড রাশি তখন $t_{r+1} < t_r$.

$\therefore$ r-এর মান যখন 12, t_{r+1} অর্থাৎ ত্রয়োদশ পদ t_{13} এই বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ।

9·6. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *In an infinite G. P. whose common ratio is numerically less than 1, show that each term bears a constant ratio to the sum of all the terms that follow it.*

মনে কর, গুণোত্তর শ্রেণীটির প্রথম পদ a, এবং সাধারণ অন্তর r-এর সাংখ্যমান < 1.

$\therefore$ শ্রেণীটি $= a, ar, ar^2, \ldots$ এবং ইহার n-তম পদ $= ar^{n-1}$.

এই অসীম শ্রেণীর n-তম পদের পরবর্তী পদগুলির সমষ্টি

$$= ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$
$$= ar^n(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত})$$
$$= \frac{ar^n}{1-r}.$$

$$\therefore \quad \frac{\text{এই শ্রেণীর } n\text{-তম পদ}}{\text{এই শ্রেণীর } n\text{-তম পদের পরবর্তী পদগুলির সমষ্টি}} = \frac{ar^{n-1}}{\frac{ar^n}{1-r}} = \frac{1-r}{r}$$

= একটি ধ্রুবক-সংখ্যা, যেহেতু পদ-সংখ্যা n যতই হউক না কেন $\frac{1-r}{r}$ সতত একই থাকে।

Ex. 2. *Sum the series* $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots\cdots$ to ∞.

মনে কর, প্রদত্ত শ্রেণীটির নির্ণেয় যোগফল $= S$,

তাহা হইলে, $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত .... (1)

$\therefore \quad Sx = x + 3x^2 + 5x^3 + \cdots \infty$ পর্যন্ত .... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$S(1-x) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$
$$= 1 + \frac{2x}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}.$$
$$\therefore \quad S = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + 9x^4 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}) + (2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত})$$
$$= (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}) + 2x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত})$$
$$= (1-x)^{-1} + 2x(1-x)^{-2}$$

[§ 9·3-এর (5) এবং (7)-এর সাহায্যে]

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

Ex. 3. *Find the first three terms in the expansion of*

$$\frac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}.$$

$$\frac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}=\left\{\left(1+x\right)^{\frac{3}{4}}+\left(1+5x\right)^{\frac{1}{2}}\right\}(1-x)^{-2}$$

$$=(1+\tfrac{3}{4}x-\tfrac{3}{32}x^2+1+\tfrac{5}{2}x-\tfrac{25}{8}x^2)(1+2x+3x^2)$$

[বিস্তৃতির প্রথম তিনটি পদের প্রয়োজন বলিয়া অপর পদগুলি বর্জন করা হইল]

$$=(2+\tfrac{13}{4}x-\tfrac{103}{32}x^2)(1+2x+3x^2)$$

$$=2+4x+6x^2+\tfrac{13}{4}x+\tfrac{13}{2}x^2-\tfrac{103}{32}x^2$$

$$=2+\tfrac{29}{4}x+\tfrac{297}{32}x^2.$$

Ex. 4. *Find the $(r+1)$th term in the expansion of*

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}=(1-3x)^{-\frac{2}{3}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় $(r+1)$-তম পদ

$$=\frac{-\frac{2}{3}(-\frac{2}{3}-1)(-\frac{2}{3}-2)\cdots\cdots(-\frac{2}{3}-r+1)}{\underline{|r}}.(-3x)^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{\frac{2}{3}.\frac{5}{3}.\frac{8}{3}.\cdots\cdots\frac{1}{3}(3r-1)}{\underline{|r}}3^rx^r$$

$$=\frac{2.5.8.\cdots\cdots(3r-1)}{3^r.\underline{|r}}.3^rx^r=\frac{2.5.8.\cdots\cdots(3r-1)}{\underline{|r}}x^r.$$

Ex. 5. *Prove that* $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ *to* $\cdots\ \infty=a^2.$

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}\cdots\ \infty$ পর্যন্ত $=a^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\cdots\ \infty$ পর্যন্ত

$=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}\sqrt[8]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\ \cdots\ \infty$ পর্যন্ত $=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{1}{8}}\ \cdots\ \infty$ পর্যন্ত

$=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\ \infty}$ পর্যন্ত $=a^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}=a.$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণী $=a.a=a^2.$

বিকল্প পদ্ধতি। মনে কর, $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=x$; $\therefore\ a\sqrt{x}=x.$
উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া, $a^2x=x^2$; $\therefore\ x=a^2.$

Ex. 6. *Find the coefficient of x^r in the expansion of $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$.*

x^r বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে অবস্থিত এবং

$$t_{r+1}=\frac{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}-1\right)\left(-\frac{1}{n}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{n}-r+1\right)}{\lfloor r}(-nx)^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\cdot\frac{3n+1}{n}\cdots\frac{(r-1)n+1}{n}}{\lfloor r}n^rx^r$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}.$

Ex. 7. *Which is the first negative term in the expansion of $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$?*

$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

$\therefore$ যতক্ষণ পর্যন্ত $n+1>r$ থাকে, ততক্ষণ পদগুলি ধনাত্মক।

$(1+2x)^{\frac{7}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে যতক্ষণ $\frac{7}{2}+1>r$ অর্থাৎ $r<4\frac{1}{2}$ থাকে ততক্ষণ পদগুলি ধনাত্মক।

$\therefore$ $r>4\frac{1}{2}$ অর্থাৎ $r=5$ হইলে, বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে।

$\therefore$ $(1+2x)^{\frac{7}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম ঋণাত্মক পদ ষষ্ঠপদ।

Ex. 8. *Prove that the coefficient of x^r in the expansion of $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ is $\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.*

প্রদত্ত দ্বিপদরাশির বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদে x^r অবস্থিত।

$\therefore$ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ t_{r+1}

$$=\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}\cdot(-4x)^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\cdots\frac{2r-1}{2}}{\lfloor r}\cdot 2^{2r}.x^r$$

$$=\frac{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{2^r\lfloor r}\cdot 2^{2r}.x^r$$

$$=\frac{\lfloor r\{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)\}.2^r}{(\lfloor r)^2}x^r$$

$$=\frac{2.4.6\ldots\ldots 2r.1.3.5\ldots\ldots(2r-1)}{(\lfloor r)^2}\cdot x^r$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6\ldots\ldots(2r-1)(2r)}{(\lfloor r)^2}x^r$$

$$=\frac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}x^r.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

Ex. 9. *Prove that* $(1+x)^n$

$$=2^n\left\{1-n\cdot\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots\right\}.$$

$$(1+x)^n=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n}=\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)\right\}^{-n}$$

$$=\frac{1}{2^{-n}}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)^{-n}$$

$$=2^n\left\{1+(-n)\frac{1-x}{1+x}+\frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=2^n\left\{1-n\cdot\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots\cdots\right\}.$$

Ex. 10. *If* $y=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots$ *to* ∞, *express* x *in a series of ascending powers of* y.

$$y=2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$\therefore \quad 1+y=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}=(1-x)^{-2}$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

$$\therefore \quad (1-x)^2=\frac{1}{1+y}=(1+y)^{-1}.$$

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইয়া

$$1-x=(1+y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+(-\tfrac{1}{2})y+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\lfloor 2}y^2+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{\lfloor 3}.y^3$$

$$+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1-\tfrac{1}{2}y+\frac{1.3}{2.4}y^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

$$\therefore x=\tfrac{1}{2}y-\frac{1.3}{2.4}y^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}y^3-\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত।}$$

Ex. 11. *Prove that* $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ *to* $\infty=\sqrt{8}$.

$$\text{বাম পক্ষ}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1+\tfrac{3}{2}.\tfrac{1}{2}+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{1.2.3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=1+(-\tfrac{3}{2})(-\tfrac{1}{2})+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)}{1.2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+\frac{-\frac{3}{2}(-\frac{3}{2}-1)(-\frac{3}{2}-2)}{1.2.3}\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(2)^{\frac{3}{2}}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}.$$

Ex. 12. *Prove that*

$$7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\cdots\cdots \text{ to } \infty\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\cdots\cdots \text{ to } \infty\right\}.$$

বাম পক্ষ $=7^n\left\{1+n\cdot\frac{1}{7}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{7^2}\right.$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{7^3}+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=7^n\left(1+\frac{1}{7}\right)^n=7^n\times\frac{8^n}{7^n}=8^n;$$

আবার, দক্ষিণ পক্ষ

$$=4^n\left\{1+n\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}\right.$$

$$\left.+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=4^n(1-\tfrac{1}{2})^{-n}=4^n(\tfrac{1}{2})^{-n}=4^n\times 2^n=8^n.$$

$$\therefore\quad 7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\cdots\cdots \infty \text{ পর্যন্ত}\right\}.$$

Ex. 13. *Prove that the coefficient of x^n in the expansion of* $\frac{1}{1+x+x^2}$ *is* 1, 0 *or* -1 *according as n is of the form* $3m$, $3m-1$ *or* $3m+1$.

প্রদত্ত রাশি $\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)(1-x^3)^{-1}$

$=(1-x)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots+x^{3(n-1)}+x^{3n}+\cdots \infty$ পর্যন্ত$)$

$=1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+x^9-x^{10}+\cdots \infty$ পর্যন্ত

$=1+x^3+x^6+x^9+\cdots\infty$ পর্যন্ত $-(x+x^4+x^7+x^{10}+\cdots\infty$ পর্যন্ত$)$

এই শ্রেণী $x^2, x^5, x^8, x^{11},\ldots$ সংবলিত পদগুলি বর্জিত।

$\therefore$ n-এর আকার যখন $3m$ অর্থাৎ n যখন 3-এর গুণিতক তখন x^n-এর সহগ $=1$.

আবার n-এর আকার যখন $3m-1$ অর্থাৎ n যখন 2, 5, 8, 11,.... প্রভৃতি হয়, তখন এই শ্রেণী x^2, x^5, x^8,.... প্রভৃতি পদ-বর্জিত বলিয়া x^n-এর সহগ $=0$.

এবং n-এর আকার যখন $3m+1$ অর্থাৎ n যখন 1, 4, 7, 10,.... প্রভৃতি হয় তখন x^n-এর সহগ $=-1$.

Ex. 14. *Find the coefficient of* x^r *in the product* $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$ *to infinity,* $|x|$ *being* <1.

$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত

$$=\frac{(1-x)\{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots n\text{-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত}\}}{1-x}$$

$$=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{2^n}}{1-x}.$$

যেহেতু n অসীম এবং $|x|<1$, x^{2^n}-এর মান শূন্য হইবে।

$\therefore$ $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots$অসীম পর্যন্ত

$$=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots \text{ অসীম পর্যন্ত।}$$

$\therefore$ x^r-এর নির্ণেয় সহগ $=1$.

Ex. 15. *Find the value of the series*

$$2+\frac{5}{\lfloor 2.3}+\frac{5.7}{\lfloor 3.3^2}+\frac{5.7.9}{\lfloor 4.3^3}+\cdots \text{ to } \infty.$$

$$\text{প্রদত্ত শ্রেণী}=2+\frac{3.5}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{3.5.7}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{3.5.7.9}{\lfloor 4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$

$$=2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\cdot\frac{2^2}{3^2}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{\lfloor 4}\cdot\frac{2^4}{3^4}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\lfloor 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\lfloor 3}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{2}{3})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{3})^{-\frac{3}{2}}=(3)^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}.$$

Ex. 16. *If p be very nearly equal to q, but greater than q, show, that* $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}=\dfrac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ *approximately.*

যেহেতু p এবং q প্রায় সমান মানবিশিষ্ট, p এবং q-এর তুলনায় $p-q$ অতিক্ষুদ্র। $\therefore$ $(p-q)$-এর সহিত তুলনায় $(p-q)^2$, $(p-q)^3$ প্রভৃতির মান এত নগণ্য যে, সেগুলি বর্জন করা যায়।

এক্ষণে, $$\sqrt[n]{\frac{p}{q}}=\left\{\frac{(p+q)+(p-q)}{(p+q)-(p-q)}\right\}^{\frac{1}{n}}=\frac{(p+q)^{\frac{1}{n}}\left\{1+\dfrac{p-q}{p+q}\right\}^{\frac{1}{n}}}{(p+q)^{\frac{1}{n}}\left\{1-\dfrac{p-q}{p+q}\right\}^{\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{1+\dfrac{p-q}{n(p+q)}}{1-\dfrac{p-q}{n(p+q)}}=\frac{n(p+q)+(p-q)}{n(p+q)-(p-q)}$$

$$=\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}.$$

Ex. 17. *If c be a quantity so small that c^3 may be neglected in comparison with l^3, show that* $\sqrt{\dfrac{l}{l+c}}+\sqrt{\dfrac{l}{l-c}}$ *is very nearly equal to* $2+\dfrac{3c^2}{4l^2}$.

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}=\sqrt{\frac{1}{1+\dfrac{c}{l}}}+\sqrt{\frac{1}{1-\dfrac{c}{l}}}$$

$$=\left(1+\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{c}{l}+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}\cdot\frac{c^2}{l^2}+\cdots$$

$$+1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{c}{l}\right)+\frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{\underline{|2}}\cdot\left(-\frac{c}{l}\right)^2+\cdots$$

[l^3-এর সহিত তুলনায় c^3 বর্জন করা যাইতে পারে বলিয়া $\dfrac{c^2}{l^2}$-এর অতিরিক্ত ঘাতসমূহ বর্জন করা হইল]

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}+1+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}=2+\frac{3c^2}{4l^2}.$$

Ex. 18. *Show that*

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\right\}.$$

দক্ষিণ পক্ষ

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{7}{5}\left(1-\frac{2}{10^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\left(\frac{98}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\left(\frac{50}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$$

$$=\frac{7}{5}\times\frac{5\sqrt{2}}{7}=\sqrt{2}.$$

Ex. 19. *Find the sum of the first $(r+1)$ coefficients in the expansion of $(1-x)^{\frac{1}{2}}$.*

মনে কর, $(1-x)^{\frac{1}{2}}=p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+\cdots+p_rx^r+\cdots$ (1)

আবার, $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots$ (2)

সুতরাং, (1) এবং (2)-এ লিখিত শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r-এর সহগ $(1-x)^{\frac{1}{2}}\times(1-x)^{-1}$-এর গুণফলে অর্থাৎ $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগের সমান হইবে।

কিন্তু (1) এবং (2) শ্রেণীদ্বয়ের গুণফলে x^r-এর সহগ

$$=p_0+p_1+p_2+p_3+\cdots+p_r,$$

এবং ইহা স্পষ্টতঃই $(1-x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির প্রথম $(r+1)$-সংখ্যক পদের সহগ-সমষ্টি।

এবং $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ

$$=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)}{\underline{|r}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{\underline{|r}}=\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r\,\underline{|r}}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ-সমষ্টি $=\dfrac{1.3.5....(2r-1)}{2^r\,\underline{|r}}.$

Ex. 20. *Find the coefficient of x^r in the expansion of $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$ to infinity$)^{\frac{2}{3}}$, when $|x|<1$.*

$1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$$=1+(-3).x+\frac{(-3).(-4)}{1.2}x^2+\frac{(-3).(-4).(-5)}{1.2.3}x^3$$

$+\cdots$ অসীম পর্যন্ত

$$=(1+x)^{-3}.$$

$\therefore$ $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots$ অসীম পর্যন্ত $)^{\frac{2}{3}}=\{(1+x)^{-3}\}^{\frac{2}{3}}$

$$=(1+x)^{-2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ

$$=\frac{-2.-3.-4\cdots\{-(r+1)\}}{\underline{|r}}=(-1)^r.(r+1).$$

Ex. 21. *Find the sum of n terms of the series $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots$ with the help of the Binomial Theorem.*

প্রদত্ত শ্রেণীর $(r+1)$-তম পদ

$$=(r+1)(r+2)(r+3)=6\times\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}$$

$=6\times(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির x^r-এর সহগ।

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$=6\times(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির প্রথম n-সংখ্যক সহগের সমষ্টি,

$=6\times(1-x)^{-5}$-এর বিস্তৃতির x^{n-1}-এর সহগ,

$$=6\times\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Examples IX

1. Find the sum of the following series :

(i) $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots\cdots$ to ∞.

(ii) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots\cdots$ to ∞.

(iii) $18-12+8-\cdots\cdots$ to ∞.

(iv) $\frac{7}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ to ∞.

(v) $(\sqrt{3}+1)+2+2(\sqrt{3}-1)+\cdots\cdots$ to ∞.

(vi) $(2+\sqrt{3})+1+(2-\sqrt{3})+\cdots\cdots$ to ∞.

(vii) $(\sqrt{5}+2)+1+(\sqrt{5}-2)+\cdots\cdots$ to ∞.

(viii) $\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\cdots\cdots$ to ∞.

(ix) $30-3+\cdot 3-\cdot 03+\cdot 003-\cdots\cdots$ to ∞.

(x) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{3}{2^6}+\cdots\cdots$ to ∞.

(xi) $\frac{2}{3}-\frac{5}{3^2}+\frac{2}{3^3}-\frac{5}{3^4}+\frac{2}{3^5}-\frac{5}{3^6}+\cdots\cdots$ to ∞.

(xii) $\cdot 9+\cdot 03+\cdot 001+\cdots\cdots\cdots$ to ∞.

2. Find the G. P. whose sum to infinity is 2 and whose second term is $\frac{4}{9}$.

3. The first two terms of an infinite G. P. are together equal to 1, and every term is twice the sum of all the terms that follow it ; find the series.

4. Find the common ratio which is numerically <1 of a G. P., continued to infinity in which each term is ten times the sum of all the terms which follow it.

5. Find the sum of the infinite series $1+(1+a)r+(1+a+a^2)r^2+(1+a+a^2+a^3)r^3+\cdots\cdots\cdots$, where a and r are proper fractions.

6. If $s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots n$ terms, find the value of n so that the error in taking the value of s as equal to 2 is

$$\frac{1}{1048576}.$$

7. Find the equivalent vulgar fraction of the following recurring decimals by exhibiting each of them as a series in G. P.

(i) $\cdot\dot{0}3\dot{7}$. (ii) $\cdot 5\dot{4}\dot{8}$. (iii) $\cdot 02\dot{1}\dot{8}$.

8. Sum the following series when $|x| < 1$,

(a) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots\cdots$ to infinity.

(b) $1.2x + 2.4x^2 + 3.8x^3 + \cdots\cdots$ to infinity.

(c) $2.3x + 5.9x^2 + 8.27x^3 + \cdots\cdots$ to infinity.

(d) $1 - 3x + 5x^2 - 7x^3 + \cdots\cdots$ to infinity.

9. Find the expansion of :

(i) $(1-x)^{-3}$. (ii) $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. (iii) $\sqrt[3]{1-x^2}$.

10. Expand $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ in ascending powers of x as far as the sixth term.

11. Show that the coefficient of x^{2r} in the expansion of $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ is 2.

12. (i) If x be so small that its cube and higher powers may be neglected, show that

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} + (1-x)^{-\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = 2 + x + \tfrac{5}{4}x^2.$$

(ii) If x is so large that $\dfrac{1}{x^5}$ is negligible, show that

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x} \text{ approximately.}$$

13. If x be small compared to unity, find the value of

$$\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{1 + x + \sqrt{1+x}}$$

when $x = \cdot 0036$, correct up to the second place of decimals.

14. Show that $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \cdots\cdots$ to infinity $= 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$ to infinity when $|x| < 1$.

15. If $y = 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \cdots\cdots$ to ∞ when $|x| < 1$, show that $x = \frac{1}{3}y - \frac{1.4}{3.6}y^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}y^3 - \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}y^4 + \cdots\cdots$ to ∞.

16. Show that $(1+x)^3$

$$= 1 + \frac{3x}{1+x} + \frac{3.4}{1.2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{3.4.5}{1.2.3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

17. When x is numerically > 1, show that

$$x^n = 1 + n\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

18. Show that the first negative term in the expansion of $(1+x)^{\frac{5}{2}}$ is $-\frac{5x^4}{128}$.

19. Find the general term in the expansion of $\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

20. Let m_r denote the middle term of $(1-x)^{2r}$. Find m_r and show that, r taking all positive integral values,

$$1 + m_1 + m_2 + m_3 + \cdots\cdots = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}.$$

21. Find the greatest term in each of the following expansions :

(i) $(1+x)^{\frac{19}{2}}$, when $x = \frac{2}{5}$. (ii) $(7-4x)^{-5}$, when $x = \frac{3}{4}$.

(iii) $(1-x)^{-\frac{14}{9}}$, when $x = \frac{20}{30}$.

22. Find the general term (t_{r+1}) in the following expansions :

(i) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$. (ii) $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. (iii) $(1+x)^{\frac{5}{3}}$.

23. Show that the general term in the expansion of $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ is

$$\frac{p(p+q)(p+2q)\cdots\{p+(r-1)q\}}{\lfloor r}\cdot\left(\frac{x}{q}\right)^r.$$

24. Find the coefficient of x^n in the expansion of

(i) $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots \text{ to } \infty)^{\frac{2}{3}}$.

(ii) $(1-3x+6x^2-10x^3+\cdots\cdots \text{ to } \infty)^{\frac{1}{6}}$.

25. Find the sum of the following series :

(i) $1+2.\frac{1}{3}+3.\frac{1}{3^2}+4.\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(ii) $1+\frac{1}{4}+\frac{1.4}{4.8}+\frac{1.4.7}{4.8.12}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(iii) $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(iv) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{6^2}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{6^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(v) $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\frac{5.8.11.14}{8.12.16.20}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(vi) $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\frac{4.5.6.7}{6.9.12.15}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

(vii) $1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{1}{4^2}+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{4^3}+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{4^4}+\cdots \text{ to } \infty$.

(viii) $1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.5}{4.8}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1.5.9}{4.8.12}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots \text{ to } \infty$.

26. Identifying as binomial expansions, show that

$$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots\cdots=0{\cdot}4 \text{ nearly.}$$

27. Find the sum of the first $(r+1)$ coefficients in the expansions of (i) $(1-x)^{-3}$ and (ii) $(1-x)^{-n}$.

28. If $p_r = \dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots\cdots2r}$, prove that

$$p_{2n+1} + p_1 p_{2n} + p_2 p_{2n-1} + \cdots\cdots + p_{n-1} p_{n+2} + p_n p_{n+1} = \frac{1}{2}.$$

29. Find the cube of

$$1 + \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 + \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \cdots\cdots \text{ to } \infty.$$

30. Show that $(1-x)^{-1}$ can be expanded in an infinite series both as

$$1 + x + x^2 + \cdots\cdots [|x| < 1] \text{ and } -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \cdots [|x| > 1].$$

31. Show that

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1.3}{2^2 \lfloor 2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \cdots\cdots$$

32. Show that

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots\cdots$$

33. If n be a positive integer, prove that

$$1 - \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2} - \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2} + \cdots = 0.$$

34. Where the series extends up to $(n+1)$ terms, show that

$$1 - \frac{n+x}{1+x} + \frac{(n+2x)(n-1)}{\lfloor 2\,(1+x)^2} - \frac{(n+3x)(n-1)(n-2)}{\lfloor 3.(1+x)^3} + \cdots = 0.$$

35. Find with the help of the Binomial Theorem, the sum of n terms of the series $1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \cdots\cdots$.

36. Find the sum of n terms of the series

$$1 + n + \frac{n(n+1)}{1.2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \cdots\cdots$$

37. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$ is $(-1)^n(n^2+2n+2)$.

38. Prove that the coefficient of x^n in the expansion of $(1-9x+20x^2)^{-1}$ is $5^{n+1}-4^{n+1}$.

39. If x be small fraction, show that

$$\frac{(1-x)^{-\frac{2}{3}}-(1+x)^{\frac{2}{3}}}{(1-x)^{-1}-(1+x)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{9}x \text{ very nearly.}$$

If $x = \cdot 1$, do you expect to get the value of the above expression correct to two decimal places? Give reasons for your answer.

40. If b^2 is much larger compared to ac, find the approximate roots of $ax^2+bx+c=0$.

ANSWERS

1. (i) 1; (ii) 3; (iii) $10\frac{4}{5}$; (iv) $\frac{49}{48}$; (v) $5+3\sqrt{3}$; (vi) $\frac{1}{2}(5+3\sqrt{3})$; (vii) $\frac{1}{4}(11+5\sqrt{5})$; (viii) $2\sqrt{2}$; (ix) $27\frac{3}{11}$; (x) $1\frac{2}{3}$; (xi) $\frac{1}{8}$; (xii) $\frac{27}{29}$.

2. $\frac{4}{5}, \frac{4}{9}, \frac{4}{27}, \cdots\cdots$ or $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27} \cdots\cdots$. **3.** $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36} \cdots\cdots$. **4.** $\frac{1}{11}$.

5. $\dfrac{1}{(1-r)(1-ar)}$. **6.** 21. **7.** (i) $\dfrac{1}{27}$; (ii) $\dfrac{181}{330}$; (iii) $\dfrac{6}{275}$.

8. (a) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$. (b) $\dfrac{2x}{(1-2x)^2}$. (c) $\dfrac{3x(3x+2)}{(1-3x)^2}$. ($d$) $\dfrac{1-x}{(1+x)^3}$.

9. (i) $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots\cdots$. (ii) $1+x+\dfrac{1.3}{1.2}x^2+\dfrac{1.3.5}{1.2.3}x^3+\cdots$.

(iii) $1-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1.2}{3.6}x^4-\dfrac{1.2.5}{3.6.9}x^6-\dfrac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^8-\cdots$.

10. $1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4-\frac{3}{8}x^5$. **13.** $\cdot 997$. **19.** $\dfrac{1.4.7.10\cdots\cdots(3r-2)}{\underline{|r}}x^r$.

20. $\dfrac{\underline{|2r}}{(\underline{|r})^2}x^r$. **21.** (i) 3rd and 4th term. (ii) 3rd and 4th term.

(iii) 17th term.

22. (i) $\dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\underline{|r}}x^r$.

(ii) $\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$. (iii) $(-1)^r.10.\dfrac{1.4.7\cdots\cdots(3r-8)}{\underline{|r}}\left(\dfrac{x}{3}\right)^r$.

24. (i) $\dfrac{2.5.8\cdots\cdots(3n-1)}{\underline{|n}}\cdot\dfrac{1}{3^n}$. (ii) $(-1)^n\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.

25. (i) $2\frac{1}{4}$. (ii) $2^{\frac{2}{3}}$. (iii) $\sqrt{3}-1$. (iv) $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

(v) $4\sqrt[3]{2}-2$. (vi) $2\frac{3}{8}$. (vii) $\frac{8}{9}\sqrt{3}$. (viii) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

27. (i) $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3\,!}$; (ii) $\dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{r\,!}$.

29. $1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots$

30. Second expansion, since $\dfrac{1}{x}<1$. **35.** $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

36. $\dfrac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n}\;\underline{|n-1}}$. **39.** Yes, terms neglected are $\dfrac{x^2}{27}$ and smaller terms.

40. $-\dfrac{c}{b}-\dfrac{ac^2}{b^3}$ and $-\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{ac^2}{b^3}$.

পরিশিষ্ট

[প্রুফ দেখার অনবধানতাবশতঃ একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশে যে কয়টি ভুল ধরা পড়িয়াছে, নিম্নে তাহাদের তালিকা দেওয়া হইল। পৃষ্ঠা নম্বর ২০১ হইতে ২৪৮-এর স্থলে পৃষ্ঠা নম্বর ১ হইতে ৪৮ পড়িতে হইবে।]

৯ পৃষ্ঠা ৯ম লাইনে a^5 এর স্থলে a^4 হইবে।

১৭ " ৪র্থ লাইনে Ex. 2 (i) $-x$ এর স্থলে $+x$ হইবে।

" " ৬ষ্ঠ লাইনে $-x$ এর স্থলে $+x$ হইবে।

" " ৭ম লাইনে $-2.x.\frac{1}{12}$ এর স্থলে $+2.x.\frac{1}{12}$ হইবে।

২৩ " Ex. 1. (ii) ৫ম লাইনের পর ইহা বসিবে।

এক্ষণে, $x^4-x^3+3x^2+2x+4=(x^2+x+1)(x^2-2x+4)$

$\therefore \quad x^6+7x^3-8=(x+2)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-2x+4)$।

৩৪ পৃষ্ঠা Ex. II 18(i) ৩য় পদে $(2c-b)^3$ এর স্থলে $(2c-a)^3$ হইবে।

" " Ex. II 20. $4(a^3+b^3+c^3-3abc)$ এইরূপ হইবে।

" " I(iv) উত্তরে প্রথম উৎপাদকটি $(3x-5x)$ এর স্থলে $(3x-5y)$ হইবে।

" " 4(iv) উত্তরে প্রথম উৎপাদকটির স্থলে $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$ লেখা যায়।

৪০ ৩য় লাইনের $a^{\frac{1}{p}}$ -এর স্থলে $a^{\frac{1}{q}}$ হইবে।

৪৪ " Ex. III 1(vi) হবে z^5 এর স্থলে x^5 হইবে।

৪৬ " Ex. 25. ২য় পদটিতে power-এ $\frac{1}{z-x}$ এর স্থলে $\frac{1}{y-x}$ হইবে।

৪৭ " Ex. III 40(i) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=0$, এইরূপ হইবে।

উচ্চ-মাধ্যমিক ত্রিকোণমিতি

একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রেসিডেন্সী কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস, এম্. এস্-সি.

ও

স্কটিশচার্চ কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়, এম্.-এ.

প্রেমচাঁদ রায়চাঁদ স্কলার

প্রণীত

ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ

১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা ১২

পাঠ্যসূচি

Trigonometrical equations and general values; Inverse circular functions; Relation between sides and angles of a triangle; Practical solution of a triangle with the help of logarithms; Simple problems of heights and distances. Graphs of simple trigonometric functions.

সূচিপত্র

Greek letters used in the book

α (Alpha)	β (Bēta)	γ (Gamma)
δ (Delta)	θ (Theta)	π (Pai)
ϕ (Phai)	ψ (Psi)	Δ (Delta)

একাদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান

(Trigonometrical Equations and General Values)

11·1. পঞ্চম অধ্যায় হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হইবে যে, কোন কোণানুপাতের মান দেওয়া থাকিলে সংশ্লিষ্ট কোণের পরিমাপ একটিমাত্র মানে সীমাবদ্ধ থাকিবে না ; উহার সংখ্যা হইবে অগণিত। যেমন, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ হইলে, θ-র একটি মান (লঘিষ্ঠ ধনাত্মক মান) হইবে $30°$; এক্ষণে সম্পূরক কোণের সাইন অভিন্ন থাকার দরুণ, $\sin 150°=\sin 30°=\frac{1}{2}$; পুনরায় যে সকল কোণ এবং $30°$ বা $150°$-এর অন্তর $360°$-এর অখণ্ড গুণিতক হইবে, সেই সমস্ত কোণের সাইন (বস্তুতঃ, সকল কোণানুপাত) অভিন্ন হইবে। অতএব, $30°$, $150°$, $390°$, $510°$ ইত্যাদি এবং $-330°$, $-210°$ প্রভৃতি প্রত্যেকটি কোণের সাইন অভিন্ন এবং '$\frac{1}{2}$'-এর সমান হইবে। অনুরূপভাবে, $\cos\theta$-র মান $\frac{1}{\sqrt{2}}$ দেওয়া থাকিলে, θ-র মান $+45°$, $+315°$, $+405°$, $-315°$, $-45°$, ... ইত্যাদির মধ্যে যে-কোন একটির সমান হইতে পারে। পুনরায়, $\tan\theta=\sqrt{3}$ হইলে, θ-র মান $60°$, $240°$, $420°$, $-300°$ ইত্যাদির মধ্যে যে-কোন একটির সমান হইতে পারে।

11·2. কোন একটি কোণানুপাত শূন্য হইলে, কোণগুলির সাধারণ মান নির্ণয় (General Expression of all angles, one of whose trigonometrical ratios is zero) :

যে সমস্ত কোণগুলির সাইন শূন্যের সমান হইবে, সংজ্ঞানুসারে সেই সমস্ত কোণগুলির যে-কোন একটি বাহুর উপর অবস্থিত যে-কোন একটি বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য শূন্য হইবে, অর্থাৎ কোণগুলির দুইটি বাহু পরস্পর মিলিয়া যাইবে। অতএব, এই সকল কোণগুলি π-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম যে-কোন গুণিতক হইতে পারে।

অতএব, **$\sin\theta=0$** হইলে, আমরা লিখিতে পারি যে, **$\theta=n\pi$**, যেখানে n, অখণ্ড ধন বা ঋণসংখ্যা বা শূন্যের সমান হইবে।

যে সমস্ত কোণগুলির কোসাইন শূন্যের সমান, সেই সমস্ত কোণগুলির একটি বাহুর উপরিস্থিত অপর বাহুর লম্ব-অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য শূন্যের সমান হইবে অর্থাৎ কোণগুলির দুইটি বাহু পরস্পর লম্ব হইবে। অতএব, কোণগুলির মান $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ হইবে, অথবা $\frac{\pi}{2}$ বা $\frac{3\pi}{2}$ হইতে তাহাদের অন্তর 2π-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম গুণিতক হইবে। অর্থাৎ, কোণগুলি $\frac{\pi}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক হইবে।

সুতরাং, $\cos\theta=0$ হইলে, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ হইবে, n সর্বদাই শূন্য অথবা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হইবে।

পুনরায়, $\tan\theta=0$ হইলে, উহার লব $=\sin\theta=0$. অতএব, $\theta=n\pi$.

অনুরূপভাবে, $\cot\theta=0$ হইলে, $\cos\theta=0$. সুতরাং, $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

দ্রষ্টব্য : $\operatorname{cosec}\theta$ অথবা $\sec\theta$ কখনও শূন্য হইতে পারে না, কারণ ইহাদের আঙ্কিক মান একক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়া অসম্ভব।

11·3. যে সকল কোণের সাইন (বা কোসেকাণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expressions of angles having the same sine or cosecant) :

মনে করি, α একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কোণ এবং $\sin\alpha$ একটি প্রদত্ত রাশি (রাশিটির আঙ্কিক মান একক অপেক্ষা বৃহত্তর হইতে পারিবে না) k-এর সমান। ব্যবহারিক সুবিধার জন্য সাধারণতঃ যে ক্ষুদ্রতম কোণের সাইন k-এর সমান, তাহাই α হিসাবে ধরা হয়। এখন, মনে করি θ অপর একটি কোণ যাহার সাইন k-এর সমান।

অতএব, $\sin\theta=\sin\alpha$, বা, $\sin\theta-\sin\alpha=0$,

বা, $2\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$.

সুতরাং, $\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0$, বা, $\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$.

$\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=0$ হইলে,

$\frac{1}{2}(\theta-\alpha)=\pi$-এর যুগ্ম বা অযুগ্ম গুণিতক $=m\pi$ ⋯ (1)

$\cos\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=0$ হইলে,

$\frac{1}{2}(\theta+\alpha)=\frac{\pi}{2}$-এর অযুগ্ম গুণিতক $=(2m+1)\frac{\pi}{2}$ ⋯ (2)

(1) হইতে আমরা জানি,

$$\theta - \alpha = 2m\pi ; \quad \therefore \ \theta = \alpha + 2m\pi \quad \cdots (3)$$

(2) হইতে আমরা জানি,

$$\theta + \alpha = (2m+1)\pi ; \quad \therefore \ \theta = -\alpha + (2m+1)\pi \quad \cdots (4)$$

(3) ও (4) হইতে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই যে,

$$\theta = (-1)^n \alpha + n\pi, \quad \cdots \quad \cdots (5)$$

যেখানে n শূন্য অথবা যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন অখণ্ড সংখ্যার সমান।

$\operatorname{cosec} \theta = \operatorname{cosec} \alpha$ হইলে, $\sin \theta = \sin \alpha$; অতএব, যে সমস্ত কোণের কোসেকাণ্ট α-র কোসেকাণ্টের সমান, সে সমস্ত কোণের সাধারণ মানও (5)-এর সাহায্যে নির্ণয় করা যাইবে।

সুতরাং, যে সমস্ত কোণের সাইন বা কোসেকাণ্টের মান যথাক্রমে α-র সাইন বা কোসেকাণ্টের মানের সহিত সমান, সেই সমস্ত কোণের মান

$$2n\pi + \alpha, \quad \text{বা,} \quad (2n+1)\pi - \alpha,$$

অথবা, $\mathbf{n\pi + (-1)^n \alpha}$.

(n সর্বদাই শূন্য অথবা কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।)

11·4. যে সকল কোণের কোসাইন (বা সেকাণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expression of angles having the same cosine or secant) :

মনে করি, α ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার কোসাইন প্রদত্ত রাশি k (যাহার আঙ্কিক মান $\not> 1$)-র সমান ; এবং মনে করি, θ এমন একটি কোণ যাহার কোসাইন k-র সমান।

অতএব, $\cos \theta = \cos \alpha$, বা, $\cos \alpha - \cos \theta = 0$,

বা, $2 \sin \frac{1}{2}(\theta + \alpha) \sin \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = 0$.

সুতরাং, $\sin \frac{1}{2}(\theta + \alpha) = 0$, বা, $\sin \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = 0$.

$\sin \frac{1}{2}(\theta + \alpha) = 0$ হইলে,

$$\tfrac{1}{2}(\theta + \alpha) = \pi\text{-এর যে-কোন অখণ্ড গুণিতক} = n\pi \quad \cdots (1)$$

$\sin \frac{1}{2}(\theta - \alpha) = 0$ হইলে,

$$\tfrac{1}{2}(\theta - \alpha) = \pi\text{-এর যে-কোন অখণ্ড গুণিতক} = n\pi \quad \cdots (2)$$

(1) হইতে জানা যায় যে, $\theta+\alpha=2n\pi$; $\therefore \theta=2n\pi-\alpha \cdots (3)$

(2) " " " ", $\theta-\alpha=2n\pi$; $\therefore \theta=2n\pi+\alpha \cdots (4)$

অতএব, (3) এবং (4) একত্র করিলে, $\theta=2n\pi\pm\alpha \cdots (5)$,

(n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা বা শূন্য)।

পূর্ব অনুচ্ছেদের অনুরূপ কারণে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, যে সমস্ত কোণের সেকাণ্ট α-র সেকাণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মানও (5)-এর সাহায্যে নির্ণীত হইবে।

অতএব, যে সমস্ত কোণের কোসাইন বা সেকাণ্ট যথাক্রমে α-র কোসাইন বা সেকাণ্টের সমান হইবে, তাহাদের সাধারণ মান

$$2n\pi \pm \alpha.$$

(n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, বা শূন্য)।

দ্রষ্টব্য : 11·3 অনুচ্ছেদের ন্যায় এখানেও α ধনাত্মক ক্ষুদ্রতম কোণ কল্পনা না করিয়া যদি মনে করি α যে-কোন কোণ যাহার কোসাইন প্রদত্ত রাশি k-র সমান, তাহা হইলেও $\cos\theta=\cos\alpha$ সমীকরণে θ-র পূর্বোক্ত সমাধানগুলির কোন ব্যতিক্রম হইবে না।

11·5. যে সকল কোণের ট্যানজেণ্ট (বা কোট্যানজেণ্ট) সমান, তাহাদের সাধারণ মান নির্ণয় (General expression of angles having the same tangent or cotangent) :

মনে করি, α ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট প্রদত্ত রাশি k-র সমান ; এবং θ, যে-কোন কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট k-র সমান।

অতএব, $\tan\theta=\tan\alpha$, বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=0$,

বা, $\dfrac{\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha}=0$, বা, $\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha}=0$.

$\therefore \sin(\theta-\alpha)=0$.

অতএব, $\theta-\alpha=\pi$-এর যে-কোন গুণিতক $=n\pi$; $\therefore \theta=n\pi+\alpha \cdots (1)$

অপর উৎপাদক $\dfrac{1}{\cos\theta\cos\alpha}$ কখনই শূন্য হইতে পারে না, কারণ, কোসাইনের আঙ্কিক মান কখনও সীমাহীন বৃহৎ রাশি হইতে পারে না।

পূর্বোক্ত ক্ষেত্রগুলির ন্যায় এক্ষেত্রেও, যে সকল কোণের কোট্যানজেণ্ট

α-কোণের কোট্যানজেণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মানও (1)-দ্বারা নির্ণীত হইবে।

অতএব, যে সমস্ত কোণের ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্ট যথাক্রমে α-কোণের ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্টের সমান, তাহাদের সাধারণ মান $n\pi+\alpha$.
(n যে-কোন একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, অথবা শূন্য)।

11·6. বিশেষ নিয়মাবলী (Special Cases) :

11·3 অনুচ্ছেদ হইতে প্রমাণ করা যায় যে, n যুগ্ম বা অযুগ্ম যাহাই হউক না কেন,

$$\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2} \text{ হইলে, } \quad \theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}$$

এবং $$\sin\theta=-1=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ হইলে, } \quad \theta=2n\pi-\frac{\pi}{2}=(4n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{বা, } \quad =(4k+3)\frac{\pi}{2}$$

[n (বা $k=n-1$) কোন অখণ্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা বা শূন্য]।

অনুরূপভাবে, 11·4 অনুচ্ছেদ হইতে প্রমাণ করা যাইবে যে,

$$\cos\theta=1 \text{ হইলে, } \quad \theta=2n\pi$$

$$\cos\theta=-1 \text{ হইলে, } \quad \theta=(2n+1)\pi.$$

[n শূন্য অথবা যে-কোন অখণ্ড ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সংখ্যা]।

উপরি-উক্ত কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্রে θ-এর এই সকল মানই সর্বদা ব্যবহৃত হয়।

11·7. জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical Treatment) :

(i) নির্দিষ্ট সাইন (বা কোসেকাণ্ট) বিশিষ্ট কোণ অঙ্কন এবং এই সকল কোণের সাধারণ মান নির্ণয় :

মনে করি যে, এমন একটি কোণ আঁকিতে হইবে যাহার sin প্রদত্ত রাশি 'a'-র সমান।

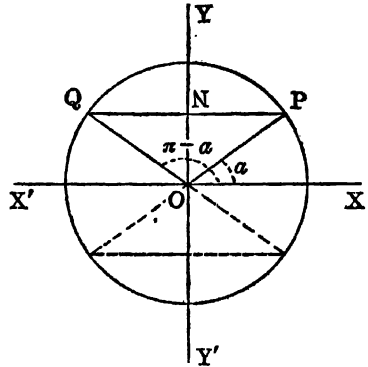
XOX′, YOY′ যে-কোন দুইটি লম্বরেখাকে অক্ষরেখারূপে গ্রহণ করিয়া O-কেন্দ্র এবং একক দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল।

OY হইতে ON রেখা 'a'-এর সমান করিয়া কাটিয়া লওয়া হইল।

['a' ঋণসংখ্যা হইলে OY′ হইতে কাটিতে হইবে]। N বিন্দুর মধ্য দিয়া

PNQ রেখা XOX′-এর সহিত সমান্তরাল করিয়া টানা হইলে, উহা পরিধিকে P এবং Q-তে ছেদ করিল।

এক্ষণে $\angle POX = a$ কল্পনা করিলে, a একটি উদ্দিষ্ট কোণ হইবে। কারণ, $\sin a = \sin OPN = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{1} = a.$

চিত্র হইতে দেখা যায় যে, অপর কোণ, যাহার সাইন 'a'-এর সমান, তাহার মান $(\pi - a)$-র সমান হইবে [অথবা $a = ON$ ঋণরাশি হইলে, অপর কোণের কোণের মান $(3\pi - a)$-র সমান হইবে এবং ইহার ত্রিকোণমিতিক মান $(\pi - a)$-র সমান]।

সুতরাং, 'a'-এর মান (< 1) ও চিহ্ন নির্দিষ্ট হইলে, YOY′-এর উপর N-এর অবস্থানও নির্দিষ্ট হইবে। অতএব, একটি পূর্ণ আবর্তনের মধ্যে (অর্থাৎ 0 এবং 2π-এর মধ্যে) কেবলমাত্র দুইটি কোণ, a এবং $(\pi - a)$-র সাইন নির্দিষ্ট রাশির সমান হইবে।*

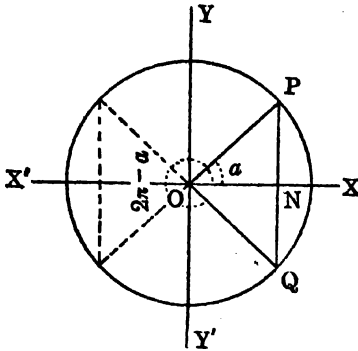
এক্ষণে, 2π-এর কোনও গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে যে-কোন কোণের কোণানুপাতগুলি অপরিবর্তিত থাকে। [অনু. 5·10]

সুতরাং, যে সমস্ত কোণের সাইন a-কোণের সাইনের সমান, তাহারা $2m\pi + a$ অথবা $2m\pi + \pi - a$ (m শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)—এই দুইটি শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হইবে। উভয় শ্রেণীর কোণগুলিকে সংক্ষেপে $\mathbf{n\pi + (-1)^n a}$, এই সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যাইতে পারে ; (এখানে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা)।

(ii) নির্দিষ্ট কোসাইন (বা সেকাণ্ট)-বিশিষ্ট কোণসমূহ ঃ

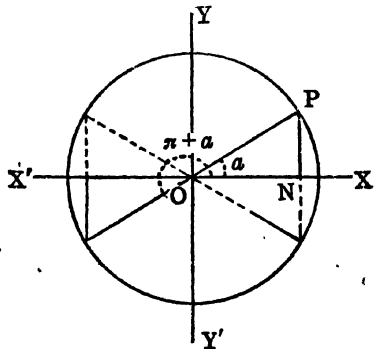
মনে করি, প্রদত্ত কোসাইন 'a'-এর সমান। পূর্বের ন্যায় OX হইতে

* সমপ্রান্তিক (coterminal) না হইলে, একই সাইন-বিশিষ্ট দুইটি পৃথক্ কোণ একই পাদে অবস্থিত হইতে পারে না, কারণ সেক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

'a'-এর সমান করিয়া ON কাটিয়া লওয়া হইল ('a' ঋণসংখ্যা হইলে পূর্বের ন্যায় OX' হইতে কাটিতে হইবে)। PNQ সরলরেখা YOY'-এর সমান্তরাল করিয়া টানা হইল; উহা O-কেন্দ্র এবং একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের পরিধিকে P এবং Q-তে ছেদ করিল।

মনে করি, $\angle POX = a$; তাহা হইলে a একটি উদ্দিষ্ট কোণ হইবে। আবার চিত্র হইতে লক্ষ্য করা যায় যে, প্রথম চারিটি পাদের অন্তর্ভুক্ত কেবল মাত্র দুইটি কোণ $a, 2\pi - a$ আছে, যাহাদের কোসাইন 'a'-এর সমান।

ইহাদের সহিত 2π-এর অখণ্ড গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে, যে সমস্ত কোণের কোসাইন a-কোণের কোসাইনের সমান, তাহাদের মান $2m\pi + a$ এবং $2m\pi + 2\pi - a$,—এই দুই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত। পুনরায়, উভয় শ্রেণীই $\mathbf{2n\pi \pm a}$ (n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) —এই সূত্র-দ্বারা নির্ণীত হইবে।

(iii) নির্দিষ্ট ট্যানজেণ্ট বা কোট্যানজেণ্ট বিশিষ্ট কোণসমূহ :

মনে করি, নির্দিষ্ট ট্যানজেণ্টের মান 'a'. OX বা OX' হইতে একক দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ON কাটিয়া লওয়া হইল। ON-এর সহিত লম্বরেখা NP হইতে 'a'-এর সমান করিয়া NP কাটিয়া লওয়া হইল। 'a' ধনরাশি হইলে ON এবং NP, উভয়েই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক রাশি হইবে; সুতরাং, $\angle XOP$ প্রথম অথবা তৃতীয় পাদে অবস্থিত হইবে; কিন্তু 'a' ঋণরাশি হইলে $\angle XOP$ দ্বিতীয় অথবা চতুর্থ পাদে অবস্থিত হইবে

সুতরাং, চিত্র হইতে ইহা সহজেই বুঝা যায় যে, 0 এবং 2π-এর মধ্যে নির্দিষ্ট কেবলমাত্র দুইটি কোণই বিদ্যমান।*

চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই বুঝা যায় যে, দুইটি কোণের মধ্যে একটি a হইলে, অপরটি নিশ্চয়ই $\pi+a$ হইবে। 2π-এর যে-কোন গুণিতক যোগ বা বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে, যে সমস্ত কোণের ট্যানজেন্ট a-কোণের ট্যানজেন্টের সমান, সেই সমস্ত কোণ $2m\pi+a$ এবং $2m\pi+(\pi+a)$—এই দুইটি সূত্রের সাহায্যে নির্ণীত হইবে। উভয় শ্রেণীকেই $n\pi+a$ —এই সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যায়, এখানে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, যুগ্ম বা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

11·8. Ex. 1. *Solve* $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1.$

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$2\cos 2\theta = 1\,; \qquad \therefore\ \cos 2\theta = \tfrac{1}{2} = \cos \tfrac{1}{3}\pi.$$

$$\therefore\ 2\theta = 2n\pi \pm \tfrac{1}{3}\pi\,; \qquad \therefore\ \theta = n\pi \pm \tfrac{1}{6}\pi.$$

দ্রষ্টব্য: ইহা লক্ষণীয় বিষয় যে, একটি ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করা যায়; এবং সমাধানের আকৃতি ভিন্ন হইলেও ইহা হইতে একই শ্রেণীর কোণই পাওয়া যাইবে। দৃষ্টান্তস্বরূপ উপরি-উক্ত উদাহরণটি একটি ভিন্ন নিয়মে করা হইল।

প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত-রূপেও লেখা যায়:

$$2(\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta) = 1, \quad \text{বা,} \quad 4\cos^2\theta = 3\,;$$

$$\therefore\ \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}, \quad \text{বা,} \quad \cos\frac{5\pi}{6}\,;$$

$$\therefore\ \theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{6}, \quad \text{বা,} \quad 2m\pi \pm \frac{5\pi}{6}.$$

এক্ষণে, $$2m\pi \pm \frac{5\pi}{6} = (2m+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad \text{বা,} \quad (2m-1)\pi + \frac{\pi}{6}.$$

n অখণ্ড ধনরাশি হইলে, উপরি-উক্ত চারিটি শ্রেণীকেই $(n\pi \pm \frac{1}{6}\pi)$-সূত্রের অন্তর্ভুক্ত করা যায়, এবং শেষোক্ত সূত্রটি পূর্বেই নির্ণীত হইয়াছে।

---

*PN : ON অনুপাতটি নির্দিষ্ট এবং ইহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ PNO সমকোণ বলিয়া PNO ত্রিভুজটি সর্বদাই নিজের সহিত সদৃশ হইবে; অতএব একই পাদে অবস্থিত $\angle PON$ সকল ক্ষেত্রেই নির্দিষ্ট থাকিবে।

Ex. 2. *Solve* $4\cos^2x+6\sin^2x=5$.

এই সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি

$$4\cos^2x+6\sin^2x=5(\cos^2x+\sin^2x),$$

বা, $\sin^2x=\cos^2x$, বা, $\tan^2x=1$;

$\therefore$ $\tan x=\pm 1=\tan\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$.

সুতরাং, $x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

দ্রষ্টব্য : $a\cos^2x+b\sin^2x=c$, —এই ধরণের সমীকরণের সমাধান উপরি-উক্ত নিয়মে অথবা সাইনকে কোসাইনে বা কোসাইনকে সাইনে রূপান্তরিত করিয়া সমাধান করা যায়।

Ex. 3. *Solve* $2\sin^2x+\sin^2 2x=2$. [C. U. 1940]

প্রদত্ত সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি যে,

$$2(1-\sin^2x)-\sin^2 2x=0, \text{ বা, } 2\cos^2x-4\sin^2x\cos^2x=0,$$

বা, $2\cos^2x(1-2\sin^2x)=0$. বা, $\cos^2x\cos 2x=0$;

সুতরাং, $\cos x=0$, বা, $\cos 2x=0$.

$\cos x=0$ সমীকরণ হইতে, $x=n\pi+\frac{1}{2}\pi$

$\cos 2x=0$, " " , $2x=2n\pi\pm\frac{1}{2}\pi$, $\therefore$ $x=n\pi\pm\frac{1}{4}\pi$.

Ex. 4. *Solve* $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

প্রদত্ত সমীকরণটির উভয় পক্ষকে $\sqrt{1^2+1^2}$ অর্থাৎ $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যায়,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2},$$

বা, $\cos\theta.\cos\frac{\pi}{4}-\sin\theta.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$,

বা, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ $\theta+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. $\therefore$ $\theta=2n\pi+\frac{1}{12}\pi,\ 2n\pi-\frac{7\pi}{12}$.

• **দ্রষ্টব্য: বহিরাগত সমাধান (Extraneous solution):** প্রথম উদাহরণে দেখানো হইয়াছে যে, একটি সমীকরণ বিভিন্ন নিয়মে সমাধান করা যায়; কোন কোন ক্ষেত্রে সমাধানগুলি আপাতদৃষ্টিতে বিভিন্ন হইলেও তাহারা মূলতঃ ভিন্ন হইবে না। কিন্তু ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতিতে সমাধান করিলে সঠিক সমাধান ছাড়াও হয়ত কোন কোন ক্ষেত্রে এমন কতকগুলি সমাধান পাওয়া যায়, যাহা প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়। ইহাদের বলা হয় **বহিরাগত সমাধান** (Extraneous solution)। উদাহরণ 4-এ প্রদত্ত সমীকরণটি এইরূপ একটি সমীকরণ; ইহাদের সাধারণ রূপ, $a\cos\theta+b\sin\theta=c$. উপরি-উক্ত সমীকরণটিকে আমরা নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সমাধান করি;

এখানে, $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\theta$. উভয় পক্ষের বর্গ লইলে,

$$\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta+\tfrac{1}{2}=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta.$$

$$\therefore\quad 2\cos^2\theta-\sqrt{2}\cos\theta-\tfrac{1}{2}=0.$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2+4.2.\frac{1}{2}}}{2.2}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{12},\ \text{বা},\ \cos\frac{7\pi}{12}.$$

$$\therefore\quad \theta=2n\pi\pm\frac{1}{12}\pi,\quad \text{বা},\quad 2n\pi\pm\frac{7\pi}{12}.$$

কিন্তু, প্রদত্ত সমীকরণে θ-র পরিবর্তে $2n\pi-\frac{\pi}{12}$, বা, $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ বসাইলে দেখা যায়, ইহারা সমীকরণের সমাধান নয়। অতএব, উপরের নিয়মে ত্রুটি আছে; **এই ত্রুটি হইল সমীকরণটিকে বর্গ করা।** কারণ, বর্গ করিলে $\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sin\theta$, অর্থাৎ, $\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, এই সমীকরণটিও উহার অন্তর্ভুক্ত হইবে এবং এই সমীকরণটির সমাধানই $2n\pi-\frac{\pi}{12}$ এবং $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$; উপরি-উক্ত রূপের সমীকরণগুলির পরবর্তী উদাহরণে প্রদত্ত নিয়মানুসারে সমাধান করাই প্রকৃষ্ট পন্থা।

সুতরাং, কোন সমীকরণের সমাধান নির্ণয় করিয়া তাহা সঠিক হইয়াছে কিনা পরীক্ষা করিয়া লওয়াই শ্রেয়; কারণ, তাহা করিলেই বহিরাগত সমাধানগুলি আবিষ্কার করা সম্ভব।

Ex. 5. *Solve* $a \cos\theta + b \sin\theta = c$ $(c \not> \sqrt{a^2+b^2})$.

মনে করি, $a = r\cos\alpha$, $b = r\sin\alpha$; (r-কে ধনাত্মক কল্পনা করিয়া α-র ক্ষুদ্রতম মান গ্রহণ করিতে হইবে)।

অতএব, $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

a এবং b-এর চিহ্ন-দ্বারা জানা যাইবে, α কোন্ পাদে অবস্থিত।

সুতরাং, a এবং b দেওয়া থাকিলে r এবং α-র নির্দিষ্ট মান পাওয়া যাইবে।

অতঃপর, সমীকরণটিকে লেখা যায়, $r\cos(\theta-\alpha) = c$,

$$\text{বা,}\quad \cos(\theta-\alpha) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta.$$

β ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ যাহার কোসাইন $\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; অতএব, a, b ও c জানা থাকিলে β-ও নির্দিষ্টরূপে জানা যাইবে।

অতএব, $\theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$. $\quad\therefore\ \theta = \alpha + 2n\pi \pm \beta$.

Ex. 6. *Solve* $4\cos x + 5\sin x = 5$, *given* $\tan 51^\circ 21' = \frac{5}{4}$.

প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ দ্বারা ভাগ করিলে দেখা যায়,

$$\frac{4}{\sqrt{41}}\cos x + \frac{5}{\sqrt{41}}\sin x = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad \cdots (1)$$

যেহেতু, $\tan 51^\circ 21' = \frac{5}{4}$,

$$\therefore\ \sin 51^\circ 21' \frac{5}{\sqrt{41}},\ \cos 51^\circ 21' = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

সুতরাং, (1)-কে আমরা বলিতে পারি যে,

$$\cos 51^\circ 21' \cos x + \sin 51^\circ 21' \sin x = \sin 51^\circ 21',$$

বা, $\cos(x - 51^\circ 21') = \sin 51^\circ 21' = \cos 38^\circ 39'$.

$\therefore\ x - 51^\circ 21' = 2n\pi \pm 38^\circ 39'$.

$\therefore\ x = 2n\pi + 90^\circ$, বা, $2n\pi + 12^\circ 42'$.

Ex. 7. (i) *Solve* $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ *for* $-\pi < x < \pi$.

উদাহরণ 3 হইতে আমরা জানি প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান

$$x = n\pi + \tfrac{1}{2}\pi \quad \cdots (1)$$

$$\text{বা,}\quad x = n\pi \pm \tfrac{1}{4}\pi. \quad \cdots (2)$$

সমাধান (1)-এ $n=0,\ -1$ বসাইলে, $x=\frac{1}{2}\pi$ এবং $-\frac{1}{2}\pi$, ইহারা উভয়েই প্রদত্ত মান $-\pi$ এবং π-এর মধ্যে অবস্থান করিবে।

সমাধান (2)-এ $n=0,\ 1,\ -1$ বসাইলে, আমরা $-\pi$ ও π-এর মধ্যে অবস্থিত নিম্নলিখিত সমাধানগুলি পাই :

$$x=\pm\tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ -\tfrac{3}{4}\pi.$$

অতএব, নির্ণেয় সমাধান : $x=\pm\dfrac{\pi}{4},\ \pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{4}.$

(ii) *Solve* $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2$,

for $-2\pi<\theta<2\pi$ *and* $3\pi<\theta<5\pi$.

উভয় পক্ষকে $\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$ দ্বারা ভাগ করিলে, আমরা নিম্নলিখিত সমীকরণটি পাই :

$$\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{2}{2}=1,$$

বা, $\cos\theta.\cos\frac{1}{3}\pi+\sin\theta.\sin\frac{1}{3}\pi=1$, বা, $\cos(\theta-\frac{1}{3}\pi)=1=\cos 0^\circ$.

$\therefore\ \theta-\frac{1}{3}\pi=2n\pi$, বা, $\theta=2n\pi+\frac{1}{3}\pi$.

এখন, $n=0,\ -1$ বসাইলে, $\theta=\frac{1}{3}\pi,\ -\frac{5}{3}\pi$, এবং ইহারা $(-2\pi,\ 2\pi)$-এর মধ্যে অবস্থান করে।

আবার, $n=1,\ 2$ বসাইলে, $\theta=\frac{7}{3}\pi,\ \frac{13}{3}\pi$, এবং ইহারা $(3\pi,\ 5\pi)$-এর মধ্যে অবস্থান করে।

Ex. 8. *Solve* $\tan ax=\cot bx$.

এখানে, $\tan ax=\cot bx=\tan(\frac{1}{2}\pi-bx)$.

সুতরাং, $ax=n\pi+\frac{1}{2}\pi-bx$. $\therefore\ x=\dfrac{2n+1}{a+b}.\dfrac{\pi}{2}$.

Ex. 9. *If* $\sec ax+\sec bx=0$, *show that the values of* x *form two series in A. P.*

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি,

$$\frac{1}{\cos ax}+\frac{1}{\cos bx}=0,\quad\text{বা,}\quad \cos ax+\cos bx=0,$$

বা, $2\cos\frac{1}{2}(a+b)x\cos\frac{1}{2}(a-b)x=0$.

সুতরাং, $\cos\frac{1}{2}(a+b)x=0$, অথবা, $\cos\frac{1}{2}(a-b)x=0$.

$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$, অথবা, $\frac{1}{2}(a-b)x=\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$,

অর্থাৎ, $x=\frac{(2n+1)\pi}{a+b}$, অথবা, $x=\frac{(2n+1)\pi}{a-b}$, যেখানে n শূন্য, বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

এক্ষণে, x-এর এই দুই শ্রেণীর মান দুইটি সমান্তরশ্রেণী গঠন করিল এবং সমান্তরশ্রেণীদ্বয়ের সাধারণ অন্তর যথাক্রমে $\frac{2\pi}{a+b}$ এবং $\frac{2\pi}{a-b}$.

Ex. 10. *If* $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$, *prove that*

$$\pm\cos\left(\theta\mp\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4n\pm1}{2\sqrt{2}},\text{ } n \text{ being zero or any integer.}$$

যেহেতু, $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$.

$\therefore\quad \cos(\frac{1}{2}\pi-\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$.

$\therefore\quad \pi\sin\theta=2n\pi\pm(\frac{1}{2}\pi-\pi\cos\theta)$,

বা, $\sin\theta\pm\cos\theta=\frac{4n\pm1}{2}$,

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{4n\pm1}{2\sqrt{2}}$,

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\pm\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta=\frac{4n\pm1}{2\sqrt{2}}$

বা, $\pm\cos\left(\theta\mp\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4n\pm1}{2\sqrt{2}}$.

Examples XI

Solve the following equations (*Ex. 1 to 23*) :—

1. $\cot^2x+\operatorname{cosec}^2x=3$.

2. (i) $2\cos^2\theta+4\sin^2\theta=3$.

   (ii) $\tan^2\theta=3\operatorname{cosec}^2\theta-1$ [C. U. 1939]

3. $\tan x-\cot x=\operatorname{cosec} x$.

4. $\cot x-\cot 2x=2$.

5. $2\sin\theta\tan\theta+1=\tan\theta+2\sin\theta$.

6. $\sin 5\theta+\sin\theta=\sin 3\theta$.

7. $\sin m\theta+\sin n\theta=0$.

8. $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$.

9. $\cot 2x = \cos x + \sin x$.

10. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, for $-\pi < x < \pi$.

11. $\sin 2x \tan x + 1 = \sin 2x + \tan x$.

12. $\cot x - \tan x = 2$. [C. U. 1934, '37]

13. $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$. [C. U. 1938, '47]

14. $2 \sin x \sin 3x = 1$.

15. $\sin \theta + 2 \cos \theta = 1$. [C. U. 1933]

16. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$.

17. $\tan (\frac{1}{4}\pi + \theta) + \tan (\frac{1}{4}\pi - \theta) = 4$. [C. U. 1949]

18. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$. [C. U. 1941, '45]

19. $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{2}$. [C. U. 1944]

20. $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$, for $-2\pi < x < 2\pi$.

21. $\cos 2x = \cos x \sin x$.

22. $2 \cot x + \sin x = 2 \operatorname{cosec} x$.

23. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$. [C. U. 1943]

24. Solve $2 \sin^2 x + \sin x = 3$; and find all the angles between $0°$ and $1000°$ which satisfy it.

25. Find the solution of the equations (general solution is not required)

$$\tan x + \tan y = 2$$

$$2 \cos x \cos y = 1.$$

26. If $\tan ax - \tan bx = 0$, show that the values of x form a series in A.P.

27. Solve

(i) $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$. [C. U. 1941, '46]

(ii) $\cos 9x \cos 7x = \cos 5x \cos 3x$, $-\frac{1}{4}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\pi$.

(iii) $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$. [A. I. 1941]

(iv) $\cos x - \sin x = \cos \alpha + \sin \alpha$. [B. H. U. 1938]

(v) $\cos^3 x - \cos x \sin x - \sin^3 x = 1$.

(vi) $\cos 6x + \cos 4x = \sin 3x + \sin x$.

(vii) $\dfrac{\sin \alpha}{\sin 2x} + \dfrac{\cos \alpha}{\cos 2x} = 2$.

28. Solve $5 \cos \theta + 2 \sin \theta = 2$, given $\tan 68° \, 12' = 2\frac{1}{2}$.

29. Find those pairs of solutions of the following equations which correspond to positive solutions less than 2π of each individual equation :—

(i) $\sin(\alpha-\beta)=0$; $\sin(\alpha+\beta)=1$.

(ii) $\sin(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$.

30. If $\sin A=\sin B$, $\cos A=\cos B$, prove that either A and B are equal or they differ by some multiple of four right angles.
[C. U. 1935]

31. Show that the three equations

$$\sin^2\theta=\sin^2\alpha,\ \cos^2\theta=\cos^2\alpha,\ \tan^2\theta=\tan^2\alpha$$

are all identical and the solution is always $n\pi\pm\alpha$.

32. Show that the same two series of angles are given by the equations

ANSWERS

1. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, *i.e.* $(2k+1)\frac{\pi}{4}$. **2.** (i) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. (ii) $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$

3. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $(2k+1)\pi$. **4.** $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

5. $n\pi+\frac{\pi}{4}$, or, $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **6.** $\frac{n\pi}{3}$, or, $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$.

7. $\frac{r\pi}{m+(-1)^r n}$. **8.** $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, or, $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, or, $(2n+1)\frac{\pi}{8}$.

9. $n\pi-\frac{\pi}{4}$, or, $\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\alpha}{2}$, where $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **10.** $\frac{1}{4}\pi$.

11. $n\pi+\frac{\pi}{4}$. **12.** $(4n+1)\frac{\pi}{8}$. **13.** $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$, or, $2n\pi-\frac{\pi}{12}$.

14. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$, or, $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **15.** $2n\pi+\frac{\pi}{2}$, or, $2n\pi-\beta$ where β is a positive acute angle whose sine is $\frac{3}{5}$. **16.** $\frac{1}{3}n\pi$. **17.** $n\pi\pm\frac{1}{6}\pi$.

18. $(4n+1)\frac{\pi}{12}$, $[n\neq 3m+2.]$ **19.** $2n\pi+\frac{7}{12}\pi$, or, $2n\pi+\frac{1}{12}\pi$.

20. $-\frac{3}{2}\pi$, $-\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$. **21.** $\frac{1}{2}(n\pi+\alpha)$, where $\tan\alpha=2$. **22.** $2n\pi$.

23. $2n\pi$, $\frac{1}{6}(4n+1)\pi$. **24.** 90°, 450°, 810°. **25.** $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$.

27. (i) $\frac{1}{2}n\pi+\frac{1}{4}\pi$; $2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$. (ii) $0,\pm\frac{\pi}{12}$, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$.

(iii) $\frac{n\pi}{3}$; $n\pi \pm \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(iv) $2n\pi - a, \frac{4n-1}{2}\pi + a$.

(v) $2n\pi$, or, $2n\pi - \frac{1}{2}\pi$.

(vi) $(2n+1)\frac{\pi}{2}, \frac{4n+1}{14}\pi, \frac{4n-1}{6}\pi$.

(vii) $n\pi + \frac{a}{2}$; $(2n+1)\frac{\pi}{6} - \frac{a}{6}$.

28. $n\pi + (-1)^n\, 21^\circ\, 48' - 68^\circ\, 12'$

29. (i) $a = \beta = \frac{1}{4}\pi$; or, $a = \frac{3}{4}\pi, \beta = -\frac{1}{4}\pi$.

(ii) $a = \frac{1}{4}\pi, \beta = \frac{1}{12}\pi$; or, $a = \frac{11}{12}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi$

or, $a = \frac{5}{4}\pi, \beta = \frac{5}{12}\pi$; or, $a = \frac{7}{12}\pi, \beta = -\frac{1}{4}\pi$.

দ্বাদশ অধ্যায়

বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক

(Inverse Circular Functions)

12·1. $\sin\theta = x$ সমীকরণটির তাৎপর্য এই যে, θ এমন একটি কোণ, যাহার সাইন x-এর সমান। অনেক ক্ষেত্রে ইহা বিপরীতভাবে অর্থাৎ $\theta = \sin^{-1}x$ এইরূপে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, $\sin^{-1}x$ প্রতীকের তাৎপর্য এই যে, ইহা এমন একটি কোণ যাহার সাইন x-এর সমান। অতএব, $\sin^{-1}x$ একটি কোণ এবং $\sin\theta$ একটি সংখ্যা। $\sin\theta = x$ এবং $\theta = \sin^{-1}x$ এই দুইটি অভিন্ন; একটি দেওয়া থাকিলে তাহা হইতে অপরটি অনায়াসেই লেখা যায়। $\sin^{-1}x$ প্রতীকটি সাধারণতঃ sine-inverse x —এইভাবে পঠিত হয়।

দ্রষ্টব্যঃ $(\sin^{-1}x)$-কে $(\sin x)^{-1}$ অর্থাৎ $\dfrac{1}{\sin x}$-এর সহিত যেন ভুল করা না হয়— প্রথমটি একটি কোণ এবং দ্বিতীয়টি একটি সংখ্যা।

12·2. একাদশ অধ্যায় হইতে আমরা জানি যে, কোন একটি কোণ θ-র সাইন যদি x-এর সমান হয়, তাহা হইলে $n\pi + (-1)^n\theta$ —এই শ্রেণীর অন্তর্গত সকল কোণের সাইন-ই x-এর সমান হইবে। অতএব, $\sin^{-1}x$-এর অসংখ্য মান হইতে পারে এবং সেইজন্য $\sin^{-1}x$-কে একটি বহুমান-বিশিষ্ট অপেক্ষক (Multiple-valued Function) বলে।

সুতরাং, **$\sin^{-1}$x-এর সাধারণ মান $= n\pi + (-1)^n \sin^{-1}x$,** (শেষোক্ত $\sin^{-1}x$ যে-কোন একটি কোণ যাহার sine x-এর সমান)।

অনুরূপভাবে, $\cos^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= 2n\pi \pm \cos^{-1}x$,

এবং $\tan^{-1}x$-এর সাধারণ মান $= n\pi + \tan^{-1}x$.

θ-র ক্ষুদ্রতম আঙ্কিক মান (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক)-কে $\sin^{-1}x$-এর মুখ্য মান (principal value) বলা হয়; যথা, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান $30°$, ইত্যাদি। কোন কোণানুপাতের সংশ্লিষ্ট যদি দুইটি কোণ থাকে, যাহাদের আঙ্কিক মান অভিন্ন, কিন্তু চিহ্ন ভিন্ন, তাহা হইলে ধনাত্মক কোণকেই মুখ্য মান হিসাবে গণ্য করা হয়; যেমন $\cos^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান $60°$, $-60°$ নয়; যদিও $\cos(-60°)$ ও $\frac{1}{2}$-এর সমান।

সমস্ত সংখ্যাবাচক উদাহরণে সাধারণতঃ মুখ্য মানই গণ্য করা হয়।

$\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\text{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\cot^{-1}x$ প্রভৃতি রাশিগুলিও $\sin^{-1}x$-এর অনুরূপ। এই সমস্ত রাশিমালাকে বলা হয় বিপরীত বৃত্তীয় অপেক্ষক।

12·3. $\sin\theta = x$ হইলে, $\theta = \sin^{-1}x$, অর্থাৎ $\theta = \sin^{-1}\sin\theta$.
অনুরূপভাবে, $\theta = \cos^{-1}\cos\theta = \tan^{-1}\tan\theta$; ইত্যাদি।
পুনরায়, $\theta = \sin^{-1}x$ হইলে, $\sin\theta = x$, অর্থাৎ $\sin\sin^{-1}x = x$.
অনুরূপভাবে, $\cos\cos^{-1}x = x$; $\tan\tan^{-1}x = x$; ইত্যাদি।
আরও আমরা প্রমাণ করিতে পারি যে,

$$\text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}\ ;\quad \cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}\ ;\quad \sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}.$$

মনে করি, $\text{cosec}^{-1}x = \theta$, তাহা হইলে, $\text{cosec}\,\theta = x$.

$\therefore\ \sin\theta = \frac{1}{x}$. সুতরাং, $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{x}$. $\therefore\ \text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}$.

এইভাবেই প্রমাণ করা যায় যে, $\text{cosec}^{-1}\frac{1}{x} = \sin^{-1}x$.

অপর দুইটি অভেদও অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়।

12·4. সমগ্র কোণানুপাতগুলিকে যেমন যে-কোন একটি কোণানুপাতের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়, অনুরূপভাবে সমগ্র বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-গুলিকেও যে-কোন একটি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

যথা— মনে করি $\sin^{-1}x = \theta$. $\therefore\ \sin\theta = x$.

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}\ ;\quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\quad \cot\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\ ;$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\quad \text{এবং}\quad \text{cosec}\,\theta = \frac{1}{x}.$$

$$\therefore\ \theta = \sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{cosec}^{-1}\frac{1}{x}.$$

12·5. *To prove that*

(i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x = \theta$; তাহা হইলে $\sin\theta = x$.

এক্ষণে, $\sin\theta = \cos(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore \cos(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x$, $\therefore \cos^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

সুতরাং, $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

(ii) মনে করি, $\tan^{-1}x = \theta$; তাহা হইলে, $\tan\theta = x$.

এক্ষণে, $\tan\theta = \cot(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore \cot(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x$. $\therefore \cot^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

$\therefore \tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

(iii) মনে করি, $\operatorname{cosec}^{-1}x = \theta$. $\therefore \operatorname{cosec}\theta = x$.

এখন, $\operatorname{cosec}\theta = \sec(\frac{1}{2}\pi - \theta)$.

$\therefore \sec(\frac{1}{2}\pi - \theta) = x$. $\therefore \sec^{-1}x = \frac{1}{2}\pi - \theta$.

অতএব, $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \theta + \frac{1}{2}\pi - \theta = \frac{1}{2}\pi$.

12·6. *To prove that*

(i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

মনে করি, $\tan^{-1}x = \alpha$ এবং $\tan^{-1}y = \beta$.

$\therefore \tan\alpha = x$, $\tan\beta = y$.

এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{x+y}{1-xy}$.

$\therefore \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$,

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

• পুনরায়, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$.

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

$$\therefore\quad \tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cot^{-1}x\pm\cot^{-1}y=\cot^{-1}\frac{xy\mp 1}{y\pm x}.$$

12·7. *To prove that*

$$\mathbf{\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}}.$$

মনে করি, $\tan^{-1}x=\alpha$; $\tan^{-1}y=\beta$; $\tan^{-1}z=\gamma$.

অতএব, $\tan\alpha=x$; $\tan\beta=y$; $\tan\gamma=z$.

এখন, $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

সুতরাং, $\alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}$.

$$\therefore\quad \tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ 12·6 অনুচ্ছেদের সূত্র ক্রমান্বয়ে দুইবার প্রয়োগ করিলেও উপরোক্ত বিষয়টি প্রমাণিত হয়। কারণ,

$$\text{বাম পক্ষ}=(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)+\tan^{-1}z$$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}+\tan^{-1}z.$$

পুনরায় অনুঃ 12·6-এর সূত্র প্রয়োগ করিলেই উপরের বিষয়টি প্রমাণিত হইবে।

12·8. বস্তুতঃ, সাধারণ অপেক্ষক-সম্বলিত সূত্রগুলি প্রয়োগ করিয়া বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-সম্বলিত অনুরূপ বহু সূত্রই নির্ণয় করা যায়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

Ex. 1. *Show that*

(i) $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$.

(ii) $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}\{xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

মনে করি, $\sin^{-1}x = \alpha$. $\therefore$ $\sin\alpha = x$ এবং $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$,

এবং, $\sin^{-1}y = \beta$. $\therefore$ $\sin\beta = y$ এবং $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$.

এখন, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$= x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore$ $\alpha \pm \beta = \sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\}$.

কিন্তু, $\alpha \pm \beta = \sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y$; সুতরাং, নির্ণেয় অভেদটি প্রমাণিত হইল।

(ii) এই অভেদগুলিও অনুরূপভাবে $\cos(\alpha \pm \beta)$ হইতে প্রমাণ করা যাইবে।

Ex. 2. *Show that*

(*i*) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(*ii*) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$.

(*iii*) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x = \alpha$. $\therefore$ $\sin\alpha = x$. $\cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$.

এখন, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$.

$\therefore$ $2\alpha = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

$\therefore$ $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) এবং (iii). এই অভেদগুলিও অনুরূপভাবে $\cos 2\alpha$ ও $\tan 2\alpha$-র সূত্র হইতে প্রমাণ করা যাইবে। [অনুঃ 8·1 দ্রষ্টব্য।]

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত অভেদ তিনটি যথাক্রমে $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y$, $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ ও $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y$-এর মানগুলিতে y-এর স্থানে x বসাইলেও পাওয়া যাইবে।

Ex. 3. *Show that*

(*i*) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(*ii*) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(*iii*) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(i) মনে করি, $\sin^{-1}x=\theta$. $\quad\therefore\quad \sin\theta=x$.

এখন, $\quad \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=3x-4x^3$.

$\therefore\quad 3\theta=\sin^{-1}(3x-4x^3)$,

অর্থাৎ, $\quad 3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) এবং (iii). $\cos\theta$-র সাহায্যে প্রকাশিত $\cos 3\theta$-র মান এবং $\tan\theta$-র সাহায্যে প্রকাশিত $\tan 3\theta$-র মান-সম্বলিত সূত্রদ্বয়ের সাহায্যে এই দুইটি অভেদও প্রমাণ করা যায়। [অনুঃ 8·2 দ্রষ্টব্য]

দ্রষ্টব্য : 12·7 অনুচ্ছেদের সূত্রে $x=y=z$ বসাইলে (iii)-এর অভেদটি পাওয়া যায়।

Ex. 4. *Show that*

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

মনে করি, $\tan^{-1}x=\theta$. $\quad\therefore\quad \tan\theta=x$.

যেহেতু, $\quad \sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1+x^2}$ [অনুঃ 8·3 দ্রষ্টব্য]

$\therefore\quad 2\theta$ অর্থাৎ $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$.

পুনরায়, যেহেতু $\quad \cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

এবং $\quad \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$,

অতএব, এই দুইটির সাহায্যে অপর দুইটি বিষয়ও প্রমাণিত হয়।

Ex. 5. *Show that*

$$\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}=0.$$

এখন, $\quad \tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b$ [অনুঃ 12·6 (ii) দ্রষ্টব্য]

$$\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}b-\tan^{-1}c$$

$$\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}=\tan^{-1}c-\tan^{-1}a.$$

উপরোক্ত অভেদগুলি যোগ করিলে নির্ণেয় অভেদটি পাওয়া যাইবে।

Ex. 6. *Show that*

$$2\tan^{-1}\tfrac{1}{5}+\tan^{-1}\tfrac{1}{4}=\tan^{-1}\tfrac{32}{43}.$$

যেহেতু, $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$, [উদা. 4 দ্রষ্টব্য]

$$2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{5^2}}=\tan^{-1}\frac{5}{12}.$$

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\dfrac{\frac{5}{12}+\frac{1}{4}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}=\tan^{-1}\dfrac{32}{43}.$

Ex. 7. *Solve* $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$

[C. U. 1947]

যেহেতু, $\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}=2\tan^{-1}x$ [উদা. 4. দ্রষ্টব্য]

বাম পক্ষ $=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b.$

অতএব, সমীকরণটির রূপ হয়

$$2\tan^{-1}x=2\tan^{-1}a+2\tan^{-1}b.$$

অথবা, $\tan^{-1}x=\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\dfrac{a+b}{1-ab}.$

$$\therefore \quad x=\frac{a+b}{1-ab}.$$

Ex. 8. *Solve* $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}.$

বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\dfrac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x^2-1}{x^2-4}}=\tan^{-1}\dfrac{2x^2-4}{-3}.$

অতএব, সমীকরণটিকে আমরা লিখিতে পারি

$\tan^{-1}\dfrac{2x^2-4}{-3}=\dfrac{\pi}{4}=\tan^{-1}1.\quad\therefore\ \dfrac{2x^2-4}{-3}=1,$ অথবা, $2x^2=1,$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ex. 9. *Show that* $\sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x = x.$

মনে করি, $\cos^{-1}x = \alpha$ ... (1) $\cos\alpha = x.$

অতএব, $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ... (2)

আবার, মনে করি $\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \beta$ ... (3)

$$\therefore \quad \cot\beta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\therefore \quad \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1-x^2}{x^2}}} = \frac{x}{1} = x.$$

এখন, $x = \sin\beta = \sin\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ [(3) হইতে]

$= \sin\cot^{-1}\tan\alpha$ [(2) দ্বারা]

$= \sin\cot^{-1}\tan\cos^{-1}x.$ [(1) হইতে]

Examples XII

Prove (*Ex. 1 to 17*) that :—

1. (i) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\pi.$

(ii) $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}.$

(iii) $\tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} + \tan^{-1}\frac{1}{18} = \cot^{-1}3.$

2. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \cot^{-1}\frac{24}{7} = \tan^{-1}\frac{1}{2}.$

3. $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = \pi$
$= 2(\tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}).$

4. (i) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}(x+1) = \tan^{-1}(x^2+x+1).$

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{p+q} + \tan^{-1}\dfrac{q}{p^2+pq+1} = \tan^{-1}\dfrac{1}{p}.$

5. $\tan^{-1}a - \tan^{-1}c = \tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}.$

6. $\tan^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{27}{11}.$

7. $\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{1}{4}\pi.$ [C. U. 1942]

8. $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{1}{4}\pi.$ [C. U. 1937]

9. (i) $\sin(2\sin^{-1}x)=2x\sqrt{1-x^2}.$

(ii) $\{\cos(\sin^{-1}x)\}^2=\{\sin(\cos^{-1}x)\}^2.$

10. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}.$

11. $\tan^{-1}\sqrt{x}$ $\quad\cos^{-}$ $\quad 1+x$ [C. U. 1943]

12. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}}.$

13. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$

$$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c}{1+c^2a^2}.$$

14. $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15.$

15. $\cot^{-1}(\tan 2x)+\cot^{-1}(-\tan 3x)=x.$

16. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{1}{2}\pi.$ [C. U. 1941]

17. $4(\cot^{-1}3+\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi.$ [C. U. 1939]

18. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, show that
$x+y+z=xyz.$

19. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{1}{2}\pi$, show that
$yz+zx+xy=1.$

20. If $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, show that
$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$

21. If $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$, show that
$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz.$

22. Find the values of

(i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2}).$ [C. U. 1935]

(ii) $\cot(\tan^{-1}a+\cot^{-1}a).$

(iii) $\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right).$

23. If $\tan^{-1} y = 4 \tan^{-1} x$, find y as an algebraic function of x.

24. If $\tan^{-1} x, \tan^{-1} y, \tan^{-1} z$ are in A.P., find out the algebraic relation between x, y, z. If in addition, x, y, z are also in A.P., prove that $x = y = z$, [$y \neq 0, 1$, or -1]

25. Solve the following equations :

(i) $\tan^{-1}(x+1) + \tan^{-1}(x-1) = \tan^{-1}\frac{8}{31}$.

(ii) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1}\dfrac{1-b^2}{1+b^2}$.

(iii) $\tan(\cos^{-1} x) = \sin(\tan^{-1} 2)$.

(iv) $\tan^{-1}\dfrac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$.

(v) $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1} + \tan^{-1}\dfrac{2x-1}{2x+1} = \tan^{-1}\dfrac{23}{36}$.

(vi) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} 2x = \frac{1}{3}\pi$.

(vii) $\sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1} x$.

(viii) $\tan^{-1}(x-1) + \tan^{-1} x + \tan^{-1}(x+1) = \tan^{-1} 3x$.

(ix) $\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2} + \cot^{-1}\dfrac{1-x^2}{2x} = \dfrac{\pi}{3}$.

(x) $\cot^{-1}(x-1) + \cot^{-1}(x-2) + \cot^{-1}(x-3) = 0$.

26. Show that

(i) $\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{x-y} + \cot^{-1}\dfrac{yz+1}{y-z} + \cot^{-1}\dfrac{zx+1}{z-x} = 0$.

(ii) $\tan(\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z)$
$= \cot(\cot^{-1} x + \cot^{-1} y + \cot^{-1} z)$.

(iii) $\tan^{-1}(\cot x) + \cot^{-1}(\tan x) = \pi - 2x$.

ANSWERS

22. (i) 1. (ii) 0. (iii) $\dfrac{x+y}{1\;[\text{illegible}]\;xy}$ **23.** $y = \dfrac{4x(1-x^2)}{1-6x^2+x^4}$

24. $(x-y)(1+yz) = (y-z)(1+xy)$. **25.** (i) $\frac{1}{4}$, or, -8. (ii) $\dfrac{a-b}{1+ab}$.

(iii) $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. (iv) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (v) $\frac{4}{3}$, or, $-\frac{3}{8}$. (vi) $\pm\frac{1}{14}\sqrt{21}$.

(vii) 0, or, $\frac{1}{2}$. (viii) 0, $\pm\frac{1}{2}$. (ix) $2-\sqrt{3}$. (x) $2+\frac{1}{3}\sqrt{6}$

ত্রয়োদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের ধর্ম

(Properties of Triangles)

13·1. যে-কোন ত্রিভুজে তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ—এই ছয়টি অংশ আছে। ABC ত্রিভুজের তিনটি কোণকে যথাক্রমে A, B ও C এবং উহার বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা সূচিত করা হয়। এই ছয়টি অংশ অবশ্য পরস্পর নিরপেক্ষ নয়। নিম্নলিখিত অনুচ্ছেদসমূহে উহাদের অন্তর্নিহিত বিভিন্ন সম্বন্ধ সম্পর্কে সিদ্ধান্ত করা হইবে।

13·2. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

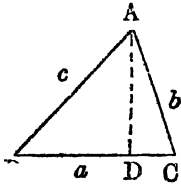
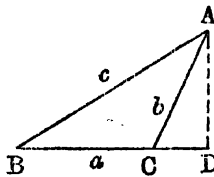
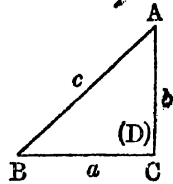



Fig. (i) Fig. (ii) Fig. (iii)

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ ; A হইতে BC অথবা BC-র বর্ধিতাংশের (চিত্র (ii)) উপর AD লম্ব টানা হইল।

[প্রথম চিত্রে C একটি সূক্ষ্মকোণ, দ্বিতীয় চিত্রে C স্থূলকোণ এবং তৃতীয় চিত্রে C একটি সমকোণ]

ABD ত্রিভুজ হইতে, $AD = AB \sin ABD = c \sin B$

এবং ACD " " , $AD = AC \sin ACD = b \sin C$ [চিত্র (i)]

বা $= b \sin (\pi - C)$ [চিত্র (ii)]

অর্থাৎ $= b \sin C.$

$\therefore \quad b \sin C = c \sin B.$

অর্থাৎ, $$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

অনুরূপভাবে, B হইতে CA-এর উপর লম্ব টানিয়া দেখানো যায় যে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

(iii)-নং চিত্রে, C একটি সমকোণ, সুতরাং,

$$\sin A=\frac{a}{c} \text{ এবং } \sin B=\frac{b}{c}\cdot \quad \sin C=\sin 90^\circ=1.$$

অতএব, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=c=\dfrac{c}{\sin C}.$

অতএব, যে-কোন ত্রিভুজে, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ... (1)

সুতরাং, **যে-কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি উহাদের বিপরীত কোণের সাইনের সমানুপাতী হইবে।**

বিকল্প প্রমাণ :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের (circum-circle) কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য R. এক্ষণে BO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে মনে করি উহা পরিবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যুক্ত করা হইল। অতএব, $\angle BCD=90^\circ$.

BCD ত্রিভুজ হইতে,

$$\sin BDC=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}.$$

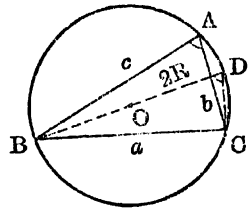
কিন্তু, $\angle BDC=\angle A$, যেহেতু উভয়েই একই বৃত্তাংশের অন্তর্গত।

$$\therefore \frac{a}{2R}=\sin A \quad \text{অথবা} \quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

অনুরূপভাবে, AO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত করিলে উহা যদি পরিধিকে E বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে CE এবং BE সংযুক্ত করিয়া দেখানো যায় যে

$$\frac{b}{\sin B}=2R \quad \text{এবং} \quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin C}}=\mathbf{2R}. \quad \cdots (2)$$

দ্রষ্টব্য 1. A স্থূলকোণ হইলে, A এবং D বিন্দুদ্বয় BC বাহুর বিপরীত দিকে অবস্থান করিবে; তাহা হইলে, যেহেতু ABCD একটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ, সুতরাং

$\sin BDC = \sin(180° - A) = \sin A$, এবং আমরা উপরোক্ত সিদ্ধান্তেই উপনীত হই। A একটি সমকোণ হইলে, $2R = a = \frac{a}{\sin A}$; অতএব উপরোক্ত সিদ্ধান্তেই পৌঁছানো যায়।

দ্রষ্টব্য 2. সিদ্ধান্ত (2) হইতে আমরা জানি,

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C;$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$

13·3. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}.$$

$$\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}.$$

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}, \quad \text{বা} \quad \mathbf{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}.$$

[অনু. 13·2-এর চিত্র দ্রষ্টব্য।]

প্রথমতঃ মনে করি C সূক্ষ্মকোণ [চিত্র (i)]; অতএব, জ্যামিতির নিয়মানুসারে $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$.

এক্ষণে ACD ত্রিভুজ হইতে, $CD = AC \cos C = b \cos C$.

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

পুনরায়, C স্থূলকোণ কল্পনা করিলে [চিত্র (ii)]

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC.CD.$$

এক্ষণে, $\triangle ACD$ হইতে, $CD = AC \cos ACD = b \cos(\pi - c)$

$$= -b \cos C.$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

অবশেষে, C সমকোণ হইলে, [চিত্র (iii)]

$$AB^2 = BC^2 + CA^2$$

$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0]$$

অতএব, C-কোণের মা[illegible] যাহাই হউক না কেন

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

অনুরূপভাবে, অপর দুইটি বিষয়ও প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ এই উপপাদ্যে ত্রিভুজের কোণের কোসাইন উহার বাহুগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা হইয়াছে।

13·4. যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\mathbf{a = b \cos C + c \cos B}$$
$$\mathbf{b = c \cos A + a \cos C}$$
$$\mathbf{c = a \cos B + b \cos A}$$

অনু ঃ 13·2-এর চিত্র দ্রষ্টব্য।

প্রথম চিত্রে, **C সূক্ষ্মকোণ,** এবং,

$$BC = BD + CD$$
$$= AB \cos ABD + AC \cos ACD,$$
$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C.$$

দ্বিতীয় চিত্রে, **C স্থূলকোণ,** এবং,

$$BC = BD - CD$$
$$= AB \cos ABD - AC \cos ACD$$
$$= c \cos B - b \cos (180^\circ - C)$$
$$= c \cos B + b \cos C.$$

তৃতীয় চিত্রে, **C সমকোণ,** এবং,

$$BC = AB \cos B$$
$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C \quad [\because \quad \cos C = \cos 90^\circ = 0].$$

সুতরাং, সর্বক্ষেত্রেই, $a = b \cos C + c \cos B.$

অপর দুইটি বিষয়ও উপরোক্ত উপায়ে প্রমাণ করা যায়।

13·5. 13·3 অনুচ্ছেদ এবং 13·2-এর দ্রষ্টব্য অনুচ্ছেদ হইতে দেখান যায় যে,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}$$

অনুরূপভাবে, $\tan B = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$

$$\tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$$

13·6. ত্রিভুজের বাহু-দ্বারা অর্ধ-কোণগুলির কোণানুপাত নির্ণয়ঃ (Trigonometrical ratios of half-angles of a triangle in terms of the sides).

আমরা জানি, $2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}.$$

এক্ষণে, s ত্রিভুজের পরিসীমার্ধ (semi-perimeter) হইলে,

$$2s = a + b + c.$$

$$\therefore \quad a - b + c = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s - c).$$

অতএব, $2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$ অর্থাৎ, $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$.

$$\therefore \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক মানটি গণ্য করিতে হইবে ; কারণ, যে-কোন কোণ A 180° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ $\frac{1}{2}A < 90°$; সুতরাং, $\frac{1}{2}A$ কোণের সকল কোণানুপাতগুলিই ধনাত্মক হইবে।

পুনরায়, $2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bb}$$

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2s - 2a = 2(s - a)$$

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s.2(s-a)}{2bc} \text{ অর্থাৎ, } \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

এখানেও, বর্গমূলের ধনাত্মক মান গণ্য করিতে হইবে ; কারণ, $\frac{1}{2}A < 90°$ বলিয়া $\cos \frac{1}{2}A$ ধনাত্মক।

পুনরায়, $\tan\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \div \cos\frac{A}{2}$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

অনুরূপভাবে, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ কোণের কোণানুপাতগুলিও বাহুগুলির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, আমরা লিখিতে পারি :

$$\left.\begin{aligned} \sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \tan\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ \tan\frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan\frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-a)}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (3)$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

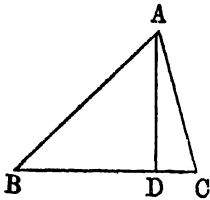
অনুরূপভাবে, $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল-সূচক রাশি বলিয়া [অনুঃ 13·8], উহাকে সাধারণতঃ গ্রীক অক্ষর Δ-দ্বারা সূচিত করা হয়। সুতরাং, উপরোক্ত সূত্রগুলি নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা যায়ঃ

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}.$$

13·8. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলঃ

মনে করি, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল Δ ; BC বাহুর উপর AD লম্ব অঙ্কিত করা হইল ; অতএব,

ΔACD হইতে, $AD = AC \sin C = b \sin C.$

এক্ষণে, $\Delta = \frac{1}{2}BC.AD = \frac{1}{2}ab \sin C.$

B এবং C হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব টানিয়া অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\Delta = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A.$$

বিকল্পভাবে, $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C$

$= \frac{1}{2}ac \sin B \quad [\because \ b \sin C = c \sin B]$

$= \frac{1}{2}bc \sin A \quad [\because \ a \sin B = b \sin A]$

সুতরাং, $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \quad \cdots \quad (i)$

$= \frac{1}{2}$ (দুইটি বাহুর গুণফল) × (অন্তর্ভূত কোণের সাইন)

পুনরায়, $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = bc \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$

$$= bc \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

উপরের রাশিতে $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ বসাইলে, ইহা প্রমাণ করা যায় যে,

$$\Delta = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$= \frac{1}{4}\{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4\}^{\frac{1}{2}}. \cdots \quad \text{(iii)}$$

পুনরায়, $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}. \quad \cdots \quad \text{(iv)}$

দ্রষ্টব্য: কোন কোন পুস্তকে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে S-দ্বারা সূচিত করা হইয়াছে; কিন্তু S এবং s-এর মধ্যে লিখিবার অসুবিধা এড়াইবার জন্য সাধারণতঃ Δ-ই সুবিধাজনক।

13·9. যে-কোন ত্রিভুজে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

আমরা জানি, যে-কোন ত্রিভুজে $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$.

$$\therefore \frac{b-c}{b+c} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}$$

$$= \cot \frac{B+C}{2} \tan \frac{B-C}{2}$$

$$= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B-C}{2} \qquad \left[\because \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ\right]$$

$$\therefore \tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}.$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

এবং $$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}.$$

13·10. 13·2, 13·3, 13·4 অনুচ্ছেদগুলিতে উল্লিখিত সূত্রাবলী জ্যামিতিক চিত্রের সহায়তায় প্রমাণিত হইয়াছে। অবশ্য এই তিনটি সূত্র পরস্পর নিরপেক্ষ নয়; কারণ, যে-কোন একটি হইতে অপর সূত্রগুলি প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণস্বরূপ 13·4 অনুচ্ছেদের সূত্রাবলী হইতে 13·3 অনুচ্ছেদের সূত্রাবলী কিভাবে পাওয়া যায় তাহা নিম্নে দেখানো হইতেছে।

13·4 অনুচ্ছেদ অনুসারে, $a = b\cos C + c\cos B.$

$$b = c\cos A + a\cos C.$$

$$c = a\cos B + b\cos A.$$

এই তিনটি সূত্রকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করিয়া, শেষের দুইটির সমষ্টি হইতে প্রথমটি বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে,

$$b^2 + c^2 - a^2 = b(c\cos A + a\cos C) + c(a\cos B + b\cos A) - a(b\cos C + c\cos B) = 2bc\cos A.$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

অনুরূপভাবে, আমরা 13·3 অনুচ্ছেদের অপর দুইটি সূত্রও পাইতে পারি।

দ্রষ্টব্য : অন্যান্য সূত্রগুলির জন্য পরিশিষ্ট দ্রষ্টব্য।

13·11. যে সমস্ত ত্রিভুজ-সম্বন্ধীয় অভেদাবলীতে ত্রিভুজের বাহু ও কোণ উভয়েই বর্তমান, সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বাহুকে কোণের সাহায্যে অথবা কোণকে বাহুর সাহায্যে প্রকাশ করা অনেক সময় সুবিধাজনক।

পুনরায়, $\tan \frac{1}{2}A$, $\tan \frac{1}{2}B$, $\tan \frac{1}{2}C$-এর মানগুলিকে সমান হর এবং করণীবিহীন লববিশিষ্ট ভগ্নাংশ হিসাবে প্রকাশ করা অনেক সময় সুবিধাজনক।

যথা, $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \Delta$ হওয়ায়, $\tan \frac{1}{2}A$-এর হর এবং লব উভয়কেই $\sqrt{(s-b)(s-c)}$ -দ্বারা গুণ করিলে দেখা যায় যে,

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta};$$

অনুরূপভাবে, $\tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$, $\tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$.

পুনরায়, $\cot \frac{1}{2}A$-এর মানের হর এবং লব উভয়কে $\sqrt{s(s-a)}$ -দ্বারা গুণ করিলে,

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta};$$

অনুরূপভাবে, $\cot\dfrac{B}{2} = \dfrac{s(s-b)}{\Delta}$, $\cot\dfrac{C}{2} = \dfrac{s(s-c)}{\Delta}$.

13·12. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Show that in any triangle*

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

বাম পক্ষ $= (a \sin B - b \sin A) + (b \sin C - c \sin B) + (c \sin A - a \sin C) = 0 + 0 + 0$

$= 0.$ [∵ অনুঃ 13·2 হইতে আমরা জানি $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$]

Ex. 2. *Show that in any triangle*

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$$

আমরা 13·2 অনুচ্ছেদ হইতে জানি যে, $a = 2R \sin A$
$= 2R \sin (B + C).$ [∵ $A + B + C = \pi$]

∴ $a \sin (B - C) = 2R \sin (B + C) \sin (B - C)$
$= 2R (\sin^2 B - \sin^2 C)$ [উদা. 2, অনুঃ 6·3 দ্রষ্টব্য]

অনুরূপভাবে, $b \sin (C - A) = 2R (\sin^2 C - \sin^2 A)$
$c \sin (A - B) = 2R (\sin^2 A - \sin^2 B).$

এখন, এই তিনটি পদ যোগ করিলে উদ্দিষ্ট বিষয়টি প্রমাণিত হইবে।

Ex. 3. *In any triangle, prove that*

$$(b - c) \cot \tfrac{1}{2}A + (c - a) \cot \tfrac{1}{2}B + (a - b) \cot \tfrac{1}{2}C = 0.$$

13·11 অনুচ্ছেদ অনুযায়ী $\cot \frac{1}{2}A$, $\cot \frac{1}{2}B$, $\cot \frac{1}{2}C$ -এর মান বসাইলে,

বাম পক্ষ $= \frac{(b-c)\, s(s-a)}{\Delta} + \frac{(c-a)\, s(s-b)}{\Delta} + \frac{(a-b)\, s(s-c)}{\Delta}$

$= \frac{s}{\Delta}\left\{(s-a)(b-c) + (s-b)(c-a) + (s-c)(a-b)\right\}$

$= \frac{s}{\Delta}\left[s\{(b-c) + (c-a) + (a-b)\} - \{a(b-c) + b(c-a) + c(a-b)\}\right]$

$= \frac{s}{\Delta}\left[0 - 0\right] = 0.$

Ex. 4. *If the cosines of two of the angles of a triangle are inversely proportional to the opposite sides, show that the triangle is either isosceles or right-angled.*

প্রশ্নানুযায়ী, $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$. [অনু: 13·2]

$\therefore$ $\sin A\cos A=\sin B\cos B$ বা $\sin 2A=\sin 2B$

বা $\sin 2A-\sin 2B=0$ বা $2\cos(A+B)\sin(A-B)=0$.

অতএব, $\cos(A+B)=0$, বা $\sin(A-B)=0$

$\cos(A+B)=0$ হইলে, $A+B=90°$, অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমকোণী।

$\sin(A-B)=0$ হইলে, $A-B=0$ বা $A=B$,

অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

Ex. 5. *If the sides of a triangle are in A. P., show that $\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ are also in A. P.*

$\cot\frac{1}{2}A$, $\cot\frac{1}{2}B$, $\cot\frac{1}{2}C$ সমান্তর শ্রেণী গঠন করিবে,

যদি $\cot\frac{1}{2}B-\cot\frac{1}{2}A=\cot\frac{1}{2}C-\cot\frac{1}{2}B$

অর্থাৎ যদি, $\frac{s(s-b)}{\Delta}-\frac{s(s-a)}{\Delta}=\frac{s(s-c)}{\Delta}-\frac{s(s-b)}{\Delta}$

অর্থাৎ, যদি, $(s-b)-(s-a)=(s-c)-(s-b)$

অর্থাৎ, যদি $a-b=b-c$ অর্থাৎ, যদি a, b, c একটি সমান্তর শ্রেণীভুক্ত হয়।

Ex. 6. *Show that*

$$b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=4\Delta.$$

বাম পক্ষ $=b^2.2\sin C\cos C+c^2.2\sin B\cos B$

$=2b\sin C.b\cos C+2c\sin B.c\cos B$

$=2b\sin C(b\cos C+c\cos B)$ [$\because b\sin C=c\sin B$]

$=2ab\sin C$ [অনু:. 13·4]

$=4.\frac{1}{2}ab\sin C=4\Delta$. [অনু:. 13·8]

Examples XIII(a)

In any triangle, prove that (*Ex. 1 to 21*) :—

1. $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$.

2. $\cos\frac{B-C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$.

3. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c.$

4. $\dfrac{a+b}{a-b}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}.$

5. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C).$

6. $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

7. $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}.$

8. $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)$
$+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0.$

$a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$
$+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0.$

10. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$

11. $a\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}+b\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C-A}{2}$
$+c\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}=0.$

12. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0.$

13. $a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0.$

14. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc.$

15. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$

16. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

17. $\dfrac{b^2-c^2}{\cos B+\cos C}+\dfrac{c^2-a^2}{\cos C+\cos A}+\dfrac{a^2-b^2}{\cos A+\cos B}=0.$

18. $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

19. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0.$

20. $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2.$

21. $\frac{1}{a}\cos^2\frac{A}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{B}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{C}{2}=\frac{s^2}{abc}.$

22. If A be 60°, show that $b+c=2a\cos\frac{B-C}{2}.$

23. Show that a triangle having its sides equal to 3, 5, 7 is an obtuse-angled triangle and determine the obtuse angle.

24. Given $(a+b+c)(b+c-a)=3bc$, find A.

25. If $c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4+a^2b^2+b^4=0$, prove that
$C=60°$, or, $120°$.

26. If $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$, prove that
$C=45°$, or, $135°$.

27. The sides of triangle are $2x+3, x^2+3x+3, x^2+2x$; show that the greatest angle is 120°.

28. If $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, show that $C=60°$.

29. If $a=2b$ and $A=3B$, find the angles of the triangle.

30. If the cosines of two of the angles of a triangle are proportional to the opposite sides, show that the triangle is isosceles.

31. If $\cos A=\frac{\sin B}{2\sin C}$, show that the triangle is isosceles.

32. If $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$, prove that the triangle is either isosceles or right-angled.

33. If $(\cos A+2\cos C):(\cos A+2\cos B)=\sin B:\sin C$, prove that the triangle is either isosceles or right-angled.

34. If a^2, b^2, c^2 be in A.P., prove that cot A, cot B, cot C are also in A.P.

35. If $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$, show that the sides of the triangle are in A.P.

36. If $\sin A:\sin C=\sin(A-B):\sin(B-C)$, show that a^2, b^2, c^2 are in A.P.

37. If a, b, c are in A.P., show that

$$\cos A \cot \tfrac{1}{2}A,\ \cos B \cot \tfrac{1}{2}B,\ \cos C \cot \tfrac{1}{2}C \text{ are in A.P.}$$

[$\cos A \cot \frac{1}{2}A = (1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A) \cot \frac{1}{2}A = \cot \frac{1}{2}A - \sin A.$]

38. Assuming $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A$ and using the value of $\cos A$ in terms of sides, show that $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

39. Find the area of the triangle whose sides are

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{x},\ \frac{z}{x} + \frac{x}{y},\ \frac{x}{y} + \frac{y}{z}.$$

40. In a triangle, if $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, find its area.

Prove that in any triangle :

41. $\dfrac{a^2 - b^2}{2} \cdot \dfrac{\sin A \sin B}{\sin (A - B)} = \Delta.$

42. $4\Delta (\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2.$

43. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$

44. $a \sin B \sin C + b \sin C \sin A + c \sin A \sin B = \dfrac{3\Delta}{R}.$

45. $(a \sin A + b \sin B + c \sin C)^2$
$= (a^2 + b^2 + c^2)(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C).$

46. $\dfrac{\cos B \cos C}{bc} + \dfrac{\cos C \cos A}{ca} + \dfrac{\cos A \cos B}{ab} = \dfrac{1}{4R^2}.$

[Use Σ *cot B cot C = 1 ; ex. 2, .Ex. X.*]

47. $\dfrac{b^2 - c^2}{a} \cos A + \dfrac{c^2 - a^2}{b} \cos B + \dfrac{a^2 - b^2}{c} \cos C = 0.$

48. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{a}{bc} = \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{b}{ca} = \dfrac{\cos C}{c} + \dfrac{c}{ab}.$

49. $4\Delta = a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C.$

50. $\left(\dfrac{a^2}{\sin A} + \dfrac{b^2}{\sin B} + \dfrac{c^2}{\sin C}\right) \sin \dfrac{A}{2} \sin \dfrac{B}{2} \sin \dfrac{C}{2} = \Delta.$

ANSWERS

23. $120°$. **24.** $A = 60°$. **29.** $A = 90°$, $B = 30°$, $C = 60°$.

39. $\sqrt{\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y}}$. **40.** 84.

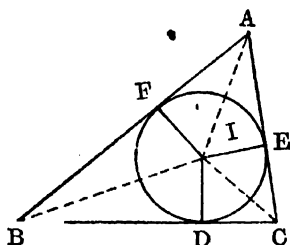
13·13. ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ : (Circum-radius).

13·2 অনুচ্ছেদ হইতে জানা আছে যে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\Delta}. \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

13·14. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ (In-radius).

মনে করি, I ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র এবং r ইহার ব্যাসার্ধ। D, E, F যথাক্রমে ত্রিভুজের বাহুর সহিত অন্তর্বৃত্তের স্পর্শবিন্দু।

অতএব, $ID=IE=IF=r$.

IA, IB, IC সংযুক্ত করা হইল।

এক্ষণে, $\triangle ABC=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$

$=\frac{1}{2}BC.ID+\frac{1}{2}CA.IE+\frac{1}{2}AB.IF$

$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs.$

$$\therefore \quad \Delta=rs \qquad \therefore \quad r=\frac{\Delta}{s} \qquad \cdots \qquad \text{(i)}$$

পুনরায়, $a=BC=BD+DC$

$=r\cot\frac{1}{2}B+r\cot\frac{1}{2}C$ [$\triangle IBD$ ও $\triangle ICD$ হইতে]

$=r\left[\frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}B}+\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}\right]=r\frac{\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$

$=r\frac{\sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}=r\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}$

[$\because \frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=90°$, $\therefore \sin(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C)=\cos\frac{1}{2}A$]

$$\therefore \quad r=\frac{a\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}A}.$$

এখন, অনুচ্ছেদ 13·13 (i) হইতে আমরা জানি যে,

$a=2R\sin A=4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$

$$\therefore \quad \mathbf{r=4R\sin\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C} \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

পুনরায়, চিত্র হইতে দেখা যায় যে, AF = AE, BD = BF, CD = CE. যেহেতু, এই ছয়টি রাশির সমষ্টি ত্রিভুজের পরিসীমার সমান, অতএব

$$AF + BD + CD = \text{অর্ধ-পরিসীমা} = s.$$

$$\therefore \quad AF + BC = AF + a = s.$$

$$\therefore \quad AF = s - a = AE\ ;$$

অনুরূপভাবে, $\quad BF = s - b = BD,\ CE = s - c = CD$;

$\triangle IAF$ হইতে দেখা যায় যে, $IF = AF \tan IAF$.

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad & \mathbf{r = (s-a)\tan \tfrac{1}{2}A} \\ \text{অনুরূপভাবে,} \quad & \mathbf{r = (s-b)\tan \tfrac{1}{2}B} \\ & \mathbf{r = (s-c)\tan \tfrac{1}{2}C} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

দ্রষ্টব্য : শীর্ষ-বিন্দু (Vertex) হইতে অন্তঃকেন্দ্রের দূরত্ব :

$\triangle IAF$ হইতে, $IA = IF \operatorname{cosec} IAF$. $\quad \therefore$ $\mathbf{IA = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}A}$.

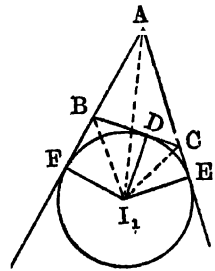
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\mathbf{IB = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}B}$, $\mathbf{IC = r \operatorname{cosec} \frac{1}{2}C}$.

13·15. ত্রিভুজের বহির্ব্যাসার্ধ : (Ex-radii of a triangle).

মনে করি, ABC ত্রিভুজের A কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্ধ r_1 ; D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর সহিত এই বৃত্তের স্পর্শবিন্দু।

B ও C কোণের বিপরীতস্থ বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে r_2 এবং r_3.

এক্ষণে, $\quad I_1D = I_1E = I_1F = r_1$.

AI_1, BI_1 ও CI_1 যুক্ত করা হইল।

এখন $\triangle ABC = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - \triangle I_1BC$

$$= \tfrac{1}{2} I_1F \,.\, AB + \tfrac{1}{2} I_1E \,.\, AC - \tfrac{1}{2} I_1D \,.\, BC$$

$$= \tfrac{1}{2} r_1c + \tfrac{1}{2} r_1b - \tfrac{1}{2} r_1a$$

$$= \tfrac{1}{2} r_1(b + c - a) = \tfrac{1}{2} r_1(a + b + c - 2a) = \tfrac{1}{2} r_1(2s - 2a)$$

$$= r_1(s - a).$$

অতএব, $\triangle = r_1(s-a)$. $\therefore\ \mathbf{r_1} = \dfrac{\Delta}{\mathbf{s-a}}$

অনুরূপভাবে $\qquad \mathbf{r_2} = \dfrac{\Delta}{\mathbf{s-b}} \qquad$ (i)

$\mathbf{r_3} = \dfrac{\Delta}{\mathbf{s-c}}$

পুনরায়, $a = BC = BD + CD$

$= r_1 \cot I_1BD + r_1 \cot I_1CD,$

($\triangle I_1BD$ ও $\triangle I_1CD$ হইতে)

$= r_1 \cot(90° - \frac{1}{2}B) + r_1 \cot(90° - \frac{1}{2}C),$

[$\because\ \angle I_1BD = \frac{1}{2}(180° - B) = 90° - \frac{1}{2}B$

$\angle I_1CD = \frac{1}{2}(180° - C) = 90° - \frac{1}{2}C$]

$\therefore\quad a = r_1(\tan\frac{1}{2}B + \tan\frac{1}{2}C) = r_1\left[\dfrac{\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}B} + \dfrac{\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}C}\right]$

$= r_1 \dfrac{\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$

$= r_1 \dfrac{\sin(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C} = r_1 \dfrac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}$

[$\because\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90°$]

$\therefore\quad r_1 = a\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C \sec\frac{1}{2}A.$

এখন, $\qquad a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$ বসাইলে,

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 4R\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C \\ \text{অনুরূপভাবে, } r_2 &= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C \\ r_3 &= 4R\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

পুনরায়, $\qquad AE = AC + CE = b + CD \qquad$ [$\because\ CE = CD$]

এবং, $\qquad AF = AB + BF = c + BD \qquad$ [$\because\ BF = BD$]

কিন্তু, $\quad AE = AF$, সুতরাং, যোগ করিলে দেখা যায় যে,

$2AE = b + c + BD + CD = b + c + a = 2s. \quad \therefore\ AE = s.$

পুনরায়, $\quad \triangle AI_1E$ হইতে, $I_1E = AE\tan I_1AE.$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad \mathbf{r_1} &= \mathbf{s\tan\tfrac{1}{2}A} \\ \text{অনুরূপভাবে, } \mathbf{r_2} &= \mathbf{s\tan\tfrac{1}{2}B} \\ \text{এবং } \mathbf{r_3} &= \mathbf{s\tan\tfrac{1}{2}C} \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

দ্রষ্টব্য : শীর্ষবিন্দু হইতে বহিঃকেন্দ্রের দূরত্ব (Distances of Ex-centres from the vertices) :

$\triangle AI_1F$ হইতে, $I_1A = I_1F \text{ cosec } I_1AF.$

$\therefore \quad \mathbf{I_1A = r_1 \text{ cosec } \frac{1}{2}A}$

$\quad = \mathbf{4R \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C}$ [সূত্র (ii) অনুযায়ী]

$\triangle BI_1F$ হইতে, $I_1B = I_1F \text{ cosec } I_1BF$

$\therefore \quad \mathbf{I_1B = r_1 \sec \frac{1}{2}B}$ [$\because \angle I_1BF = 90° - \frac{1}{2}B$]

অনুরূপভাবে, $\mathbf{I_1C = r_1 \sec \frac{1}{2}C}$.

এইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\mathbf{I_2B = r_2 \text{ cosec } \frac{1}{2}B, \; I_3C = r_3 \text{ cosec } \frac{1}{2}C}$.

13·16. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Prove that* $\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \dfrac{1}{r_3} = \dfrac{1}{r}$.

13·15 অনুচ্ছেদের (i) সূত্রানুযায়ী

বাম পক্ষ $= \dfrac{s-a}{\triangle} + \dfrac{s-b}{\triangle} + \dfrac{s-c}{\triangle}$

$= \dfrac{3s-(a+b+c)}{\triangle} = \dfrac{3s-2s}{\triangle} = \dfrac{s}{\triangle} = \dfrac{1}{r}$.

Ex. 2. *Prove that* $4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C = \dfrac{s}{R}$.

বাম পক্ষ $= 4 \cdot \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \cdot \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}} \cdot \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

$= \dfrac{4s}{abc} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \dfrac{4s}{abc} \cdot \triangle \cdot = s \cdot \dfrac{4\triangle}{abc} = \dfrac{s}{R}$. [অনুঃ 13·13-এর (ii)-নং সূত্রানুযায়ী]

Ex. 3. *Show that*

$$\frac{bc - r_2r_3}{r_1} = \frac{ca - r_3r_1}{r_2} = \frac{ab - r_1r_2}{r_3}.$$

$$r_2r_3 = \frac{\triangle^2}{(s-b)(s-c)} = s(s-a).$$

$\therefore \quad bc - r_2r_3 = \frac{1}{4}[4bc - 2s(2s-2a)]$

$\quad = \frac{1}{4}[4bc - (a+b+c)(b+c-a)]$

$$= \frac{1}{4}[4bc + a^2 - (b+c)^2] = \frac{1}{4}[a^2 - (b-c)^2]$$

$$= \frac{1}{4}[(a+b-c)(a-b+c)] = (s-b)(s-c).$$

$$\therefore \quad \frac{bc - r_2 r_3}{r_1} = \frac{(s-b)(s-c)}{r_1} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{\Delta}$$

$$= \frac{\Delta}{s} = r.$$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\frac{ca - r_3 r_1}{r_2} = r = \frac{ab - r_1 r_2}{r_3}$.

অতএব উদ্দিষ্ট বিষয়টি প্রমাণিত হইল।

Ex. 4. *Prove that in any triangle*

$$r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R.$$

বাম পক্ষ $= \left(\frac{\Delta}{s-a} + \frac{\Delta}{s-b}\right) + \left(\frac{\Delta}{s-c} - \frac{\Delta}{s}\right)$

$$= \Delta \frac{2s - a - b}{(s-a)(s-b)} + \Delta \cdot \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \Delta c\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{s(s-c)}\right], \qquad [\because \; 2s = a+b+c]$$

$$= \Delta c \cdot \left[\frac{s(s-c) + (s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right]$$

$$= \Delta c \cdot \frac{2s^2 - s(a+b+c) + ab}{\Delta^2} = c \cdot \frac{2s^2 - s \,.\, 2s + ab}{\Delta}$$

$$= \frac{c \,.\, ab}{\Delta} = \frac{abc}{\Delta} = 4\text{R}.$$

Ex. 5. *If* $r_1 = r_2 + r_3 + r$, *prove that the triangle is right-angled.*

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি যে,

$$r_1 - r = r_2 + r_3$$

বা $\quad \frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s} = \frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-c}$

বা $\quad \frac{\Delta a}{s(s-a)} = \frac{\Delta \,.\, (2s-b-c)}{(s-b)(s-c)} = \frac{\Delta \,.\, a}{(s-b)(s-c)}.$

$\therefore \quad s(s-a) = (s-b)(s-c).$

$\therefore \quad \tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} = 1 \qquad \therefore \quad \tan \frac{1}{2}A = 1.$

$\therefore \quad \frac{1}{2}A = 45°. \qquad \therefore \quad A = 90°$

দ্রষ্টব্য : বর্গমূল লইলে $\tan \frac{1}{2}A = \pm 1$ হইলেও, শুধু ধনাত্মক মান গণ্য করিতে হইবে, কারণ যে-কোন ত্রিভুজে $\frac{1}{2}A$ একটি সূক্ষ্মকোণ।

Examples XIII (b)

Prove that in any triangle (*Ex. 1 to 14*) :—

1. $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{s}{R}$.

2. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

[*Use* $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$.]

3. $\frac{b-c}{r_1} + \frac{c-a}{r_2} + \frac{a-b}{r_3} = 0$.

4. $r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2 = s^2$.

5. $r = R(\cos A + \cos B + \cos C - 1)$.

6. $r_1 = R(\cos B + \cos C - \cos A + 1)$.

[*Use* $\cos B + \cos C - \cos A = -1 + 4 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$]

7. $a \cos B \cos C + b \cos C \cos A + c \cos A \cos B = \frac{\Delta}{R}$.

8. $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r)$.

$\left[a \cot A = \frac{a}{\sin A} \cdot \cos A = 2R \cos A. \right.$ *Then use Ex. 2.*]

9. $R = \frac{1}{4} \frac{(r_2 + r_3)(r_3 + r_1)(r_1 + r_2)}{r_2 r_3 + r_3 r_1 + r_1 r_2}$.

10. $\Delta = \sqrt{r r_1 r_2 r_3} = r^2 \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$.

11. $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{4R}{r^2 s^2} = \frac{16R}{r^2 (a+b+c)^2}$.

[A. I. 1938]

12. $\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)^2 = \frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$.

13. $r_1(r_2+r_3)\operatorname{cosec} A = r_2(r_3+r_1)\operatorname{cosec} B$
$= r_3(r_1+r_2)\operatorname{cosec} C.$

14. $\dfrac{bc}{r_1}+\dfrac{ca}{r_2}+\dfrac{ab}{r_3}=2R\left\{\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}-3\right\}.$

15. In a triangle, $a=13$, $b=14$, $c=15$; find r and R.

16. If a, b, c are in A.P., show that r_1, r_2, r_3 are in H.P.

17. If in a triangle, $3R=4r$, show that

$$4(\cos A+\cos B+\cos C)=7.$$

18. If the diameter of an ex-circle be equal to the perimeter of the triangle, show that the triangle is right-angled.

[*Use* $r_1 = s \tan \frac{1}{2}A$.]

19. If $\left(1-\dfrac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\dfrac{r_1}{r_3}\right)=2$, show that the triangle must be right-angled.

20. If $8R^2=a^2+b^2+c^2$, show that the triangle is right-angled.

21. If S be the area of the in-circle and S_1, S_2, S_3 the areas of the escribed circles, then

$$\frac{1}{\sqrt{S}}=\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}.$$

22. In any triangle, prove that the area of the in-circle is to the area of the triangle as $\pi : \cot \frac{1}{2}A \cot \frac{1}{2}B \cot \frac{1}{2}C$.

23. If p_1, p_2, p_3 are the perpendiculars from the angular points of a triangle to the opposite sides, show that

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

24. If x, y, z be the lengths of the perpendiculars from the circum-centre on the sides BC, CA, AB of the triangle ABC, prove that

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{4xyz}.$$

25. If x, y, z are respectively equal to IA, IB, IC, and α, β, γ are respectively equal to I_1A, I_2B, I_3C, show that

(i) $\dfrac{xyz}{abc} = \dfrac{r}{s}$. (ii) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} + \dfrac{z}{\gamma} = 1$.

(iii) $\dfrac{bc}{\alpha^2} + \dfrac{ca}{\beta^2} + \dfrac{ab}{\gamma^2} = 1$. (iv) $ax^2 + by^2 + cz^2 = abc$.

[*Use Notes of Arts. 13·14 and 13·15.*]

ANSWERS

15. $r = 4$; $R = 8\frac{1}{8}$.

চতুর্দশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম্ (Logarithms)

14·1. লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা :

একটি নির্দিষ্ট রাশির যে ঘাত অপর একটি নির্দিষ্ট রাশির সমান, সেই ঘাতের সূচককে (index of the power) বলা হয় দ্বিতীয় রাশির 'লগারিদ্‌ম্', যাহার নিধান (base) হইবে প্রথম রাশি।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $a^x = \mathrm{N}$ হইলে, x হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে a (যাহাকে বলা হয় নিধান) N-এ পরিবর্তিত হইবে। অতএব, সংজ্ঞানুসারে x হইতেছে N-এর লগারিদ্‌ম্ যাহার নিধান a ; ইহা সাধারণতঃ, $x = \log_a \mathrm{N}$ রূপে লিখিত হয়।

$2^3 = 8$ বলিয়া $\log_2 8 = 3$; অর্থাৎ 3 হইতেছে সেই ঘাত যাহার ক্রিয়ার ফলে 2 পরিবর্তিত হইবে 8-এ। পুনরায় $3^4 = 81$ বলিয়া $\log_3 81 = 4$; ইত্যাদি।

সূচক-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল লগারিদ্‌ম্-এর সাহায্যে এবং বিপরীতক্রমে লগারিদ্‌ম্-সম্বলিত যে-কোন ফলাফল সূচকের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $p^q = r$ হইলে, $\log_p r = q$

$m^n = z^k$ হইলে, $n = \log_m (z^k)$

বা, $k = \log_z (m^n)$.

অনুরূপভাবে, $\log_y x = z$ হইলে, $y^z = x$.

মনে রাখিতে হইবে যে, একই সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর নিধান বিভিন্ন হইলে উহাদের মানও বিভিন্ন হইবে ; যেমন, 2-এর 6 ঘাত, 4-এর 3 ঘাত বা 8-এর 2 ঘাত প্রত্যেকেই 64-এর সমান ; অতএব $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 3$, এবং $\log_8 64 = 2$. অতএব, নিধানের সঠিক উল্লেখ না থাকিলে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ সম্পূর্ণ অর্থহীন হইবে।

14·2. বিশেষ ফলাফল :

বীজগণিত হইতে আমরা জানি যে, a কোন বাস্তব সসীম (শূন্য ব্যতীত) রাশি হইলে $a^0 = 1$; অতএব, $\log_a 1 = 0$. অর্থাৎ, ভাষায় প্রকাশ করিলে

(i) 1-এর শূন্য ব্যতীত যে-কোন সসীম নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ শূন্য হইবে।

পুনরায়, a যে-কোন রাশি হইলে $a^1=a$; $\log_a a=1$.

অর্থাৎ, (ii) **কোন সংখ্যার সম-নিধানবিশিষ্ট লগারিদ্‌ম্ 1 হইবে।**

দ্রষ্টব্য 1. $a^x=0$ হইলে, $x=-\infty$, যখন $a>1$

বা, $x=+\infty$, যখন $a<1$.

অতএব, $\log_a 0=-\infty$, যদি $a>1$ হয়,

$=+\infty$, যদি $a<1$ হয়।

অর্থাৎ, শূন্যের 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ঋণরাশি এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ অসীম ধনরাশি হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. a এবং n বাস্তব ধনরাশি হইলে, $a^x=-n$ সমীকরণটি x-এর কোন বাস্তব মানের সাহায্যে সমাধান করা যায় না (এক্ষেত্রে কেবলমাত্র a^x-এর মুখ্যমান* ধরা হইয়াছে); সুতরাং, **একটি ঋণরাশির লগারিদ্‌ম্ (যেক্ষেত্রে নিধান বাস্তব ধনরাশি) অবশ্যই অস্তিত্বহীন বা অবাস্তব হইবে।**

14·3. লগারিদ্‌ম্-সংশ্লিষ্ট মৌলিক সূত্রাবলী :

লগারিদ্‌ম্-এর সংজ্ঞা হইতে দেখা যায় যে, লগারিদ্‌ম্ সূচকের অন্য একটি রূপমাত্র। আমরা জানি যে, a, x, y বাস্তব রাশি হইলে,

(i) $a^x\times a^y=a^{x+y}$

(ii) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

এবং (iii) $(a^x)^y=a^{xy}$.

বীজগণিতে সূচক নিয়মের এই তিনটি মৌলিক সূত্রের অনুরূপ লগারিদ্‌ম্-এরও তিনটি মৌলিক সূত্র পাওয়া যায়। সূত্রগুলি নিম্নে দেওয়া হইল :

(i) $\mathbf{\log_a(m\times n)=\log_a m+\log_a n.}$

অর্থাৎ দুইটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদ্‌ম্ উক্ত সংখ্যা দুইটির পৃথক্‌ভাবে গৃহীত লগারিদ্‌ম্-এর সমষ্টির সমান।

---

* মুখ্য মানের সংজ্ঞার জন্য Higher Trigonometry by Das & Mukherjee দ্রষ্টব্য।

প্রমাণ : মনে করি, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ এবং $\log_a (mn) = z$.

অতএব, সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$ এবং $a^z = mn = a^x . a^y = a^{x+y}$.

$$\therefore \quad z = x + y.$$

অর্থাৎ, $$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n.$$

অনুসিদ্ধান্ত : অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\log_a (m.n.p\ldots) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \cdots\cdots$$

(ii) $\mathbf{\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.}$

অর্থাৎ, দুইটি সংখ্যার ভাগফলের লগারিদ্‌ম্ উক্ত সংখ্যাদ্বয়ের লগারিদ্‌ম্-এর অন্তরের সমান (লবের লগারিদ্‌ম্ বিযুক্ত হরের লগারিদ্‌ম্) ।

প্রমাণ : মনে করি, $\log_a m = x$, $\log_a n = y$, এবং $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = z$.

অতএবং সংজ্ঞানুসারে, $a^x = m$, $a^y = n$, এবং $a^z = \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

$$\therefore \quad z = x - y.$$

অর্থাৎ, $$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n.$$

(iii) $\mathbf{\log_a (m)^n = n \log_a m.}$

অর্থাৎ, একটি সংখ্যার ঘাতের লগারিদ্‌ম্, ঘাত এবং উক্ত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর গুণফলের সমান হইবে।

প্রমাণ : $\log_a m = x$ এবং $\log_a (m)^n = z$ ধরিলে, সংজ্ঞানুসারে

$$a^x = m, \; a^z = m^n = (a^x)^n = a^{nx}.$$

$$\therefore \quad z = nx.$$

অর্থাৎ, $$\log_a (m)^n = n \log_a m.$$

14·4. নিধান-পরিবর্তন (change of base).

সংখ্যাগুলির কোনও নির্দিষ্ট নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ দেওয়া থাকিলে, যে-কোনও সংখ্যার অপর যে-কোন নিধানযুক্ত লগারিদ্‌ম্ নির্ণয় করা যায়। সংশ্লিষ্ট সূত্রটি এই :

$$\mathbf{\log_a m = \log_b m \times \log_a b.}$$

প্রমাণ : $\log_a m = x$, $\log_b m = y$, এবং $\log_a b = z$ কল্পনা করিলে

$$a^x = m,\ b^y = m,\ a^z = b.$$

$$\therefore\quad a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}.\quad \therefore\ x = yz.$$

অর্থাৎ, $\log_a m = (\log_b m) \times (\log_a b)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. উপরোক্ত ফলাফলে $m = a$ ধরিলে, প্রমাণ করা হয় যে,

$$(\log_b a) \times (\log_a b) = 1. \qquad [\because\ \log_a a = 1]$$

এই সূত্রটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় বলিয়া ইহার একটি নিরপেক্ষ প্রমাণ দেওয়া হইল :—

মনে করি, $\log_b a = x$ এবং $\log_a b = y$. অতএব, $b^x = a$ এবং $a^y = b$.

$$\therefore\quad a = b^x = (a^y)^x = a^{xy}.\quad \therefore\ xy = 1.$$

$$\therefore\quad \log_b a \times \log_a b = 1.$$

অর্থাৎ, $$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. উপরোক্ত অনুচ্ছেদের সূত্রটি অনুসিদ্ধান্ত 1-এর সাহায্যে আমরা নিম্নলিখিতরূপে লিখিতে পারি :

$$\log_a m = \log_b m / \log_b a.$$

অতএব, m এবং a উভয়ের b-নিধানযুক্ত লগারিদম্ জানা থাকিলে m-এর a নিধানযুক্ত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।

14·5. সাধারণ লগারিদম্ (Common system of logarithms).

প্রায় সমস্ত ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আঙ্কিক গণনার জন্য যে সমস্ত লগারিদম্-এর প্রয়োগ হয়, তাহাদের নিধান সাধারণতঃ 10 ধরিয়া লওয়া হয়। যে সকল লগারিদম্-এর নিধান 10 তাহাদিগকে সাধারণ (common) লগারিদম্ পদ্ধতির অন্তর্ভুক্ত বলা হয়। অনু. 14·6-এর I এবং II উপপাদ্যে ইহাদের সুবিধা সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

দ্রষ্টব্য। উচ্চতর গণিতে তাত্ত্বিক (theoretical) আলোচনার জন্য নিধান ধরা হয় অন্য একটি অমেয় রাশি e যাহার মান 2·718··· (এই সম্পর্কে বীজগণিতে আলোচনা আছে)। এই সমস্ত লগারিদম্‌কে বলা হয় প্রাকৃত বা নেপিরীয় লগারিদম্ (Natural or Naperian logarithm).

লগারিদম্ শ্রেণীর (logarithmic series) সাহায্যে বিভিন্ন সংখ্যার প্রাকৃত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায় (বীজগণিতে ইহার প্রণালী প্রদর্শিত হইয়াছে)।

এই সমস্ত লগারিদম্‌কে গুণক $\frac{1}{\log_e 10}$-এর সাহায্যে সাধারণ লগারিদম্‌-এ পরিবর্তিত করা যায়। এই গুণককে বলা হয় সাধারণ পদ্ধতির লগারিদম্‌-এর মাপাঙ্ক (modulus).

অতঃপর আমরা কেবলমাত্র সাধারণ লগারিদম্‌-এরই উল্লেখ করিব এবং নিধান উল্লেখ না থাকিলে উহাকে 10 ধরিতে হইবে।

14·6. সাধারণ লগারিদম্‌-এর পূর্ণক (Characteristic) এবং অংশক (Mantissa).

মাত্র অল্প কয়েকটি ক্ষেত্রে লগারিদম্‌ অখণ্ড সংখ্যা হইতে পারে কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ আংশিকভাবে অখণ্ড এবং আংশিকভাবে সামান্য বা দশমিক ভগ্নাংশ হইবে।

সংজ্ঞা। কোন সংখ্যার লগারিদম্‌-এর **অখণ্ড অংশকে "পূর্ণক"** এবং **দশমিক অংশকে "অংশক"** বলা হয়।

কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ ঋণসংখ্যা এবং আংশিকভাবে পূর্ণসংখ্যা ও আংশিকভাবে দশমিক ভগ্নাংশ হইলে, অংশক অথবা দশমিক অংশকে সর্বদাই ধনসংখ্যা রাখিয়া পূর্ণককে পরিবর্তিত করিতে হয়। অতএব, কোন সংখ্যার লগারিদম্‌-এর অংশক সর্বদাই ধনাত্মক হইবে। যেমন, কোন সংখ্যার লগারিদম্‌ $-2\cdot3$ হইলে উহাকে $-3+\cdot7$-এর সমান লেখা যায় ও তখন -3 কে বলা হয় পূর্ণক এবং $\cdot7$-কে বলা হয় অংশক ($-\cdot3$ নয়)। $-3+\cdot7$-কে সংক্ষেপে $\bar{3}\cdot7$ লেখা হয়।

উপপাদ্য I. (i) 1অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যার সাধারণ লগারিদম্‌-এর পূর্ণক সর্বদাই ধনাত্মক এবং সংখ্যাটির অখণ্ডাংশের অঙ্কের সংখ্যা হইতে এক কম ;

(ii) 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনসংখ্যার লগারিদম্‌-এর পূর্ণক সর্বদা ঋণাত্মক হইবে এবং সংখ্যাটির দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে যে কয়টি শূন্য থাকিবে, পূর্ণকের আঙ্কিক মান তাহা অপেক্ষা এক বেশী হইবে।*

(i) মনে করি যে, সংখ্যাটি এক অপেক্ষা বৃহত্তর।

* 10-এর এমন কোন বাস্তব ঘাত নির্ণয় করা যায় না যাহার ফলে মান ঋণাত্মক হইবে। অতএব ঋণসংখ্যার লগারিদম্‌ সম্পূর্ণ কাল্পনিক হইবে। [অনুঃ 14·2-এর দ্রষ্টব্য 2.]

যে-কোন সংখ্যার অখণ্ড অংশ এক অঙ্কের হইলে (যেমন, 7·209) সংখ্যাটি 1 এবং 10-এর মধ্যবর্তী হইবে।

এক্ষণে $10^0 = 1$ এবং $10^1 = 10$.

অতএব, $10^x = 7·209$ হইলে, x শূন্য অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, log 7·209-এর মান 0 এবং 1-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ ইহার রূপ হইবে 0·⋯ এবং পূর্ণক হইবে 0।

অনুরূপভাবে, 53·0528 এই ধরণের সংখ্যাগুলি (যাহাদের অখণ্ড অংশ দুই অঙ্কের সংখ্যা) 10 এবং 100 অর্থাৎ 10^1 এবং 10^2-এর মধ্যবর্তী হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত 53·0528 হইবে, সেই ঘাত 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 2 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অর্থাৎ log 53·0528-এর মানের রূপ হইবে 1·⋯ এবং পূর্ণক হইবে এক।

log 10 = 1, এবং, 10 সংখ্যাটিও দুই অঙ্কের সংখ্যার শ্রেণীভুক্ত।

অনুরূপভাবে, যে সমস্ত সংখ্যার অখণ্ড অংশ n অঙ্কের, তাহারা 10^{n-1} (যাহা n অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা) এবং 10^n (যাহা $n+1$ অঙ্কের ক্ষুদ্রতম সংখ্যা)-এর মধ্যবর্তী হইবে অর্থাৎ তাহাদের লগারিদম্-এর মান হইবে $(n-1)+$ কোন সামান্য ভগ্নাংশ। অতএব, এই সমস্ত ক্ষেত্রে পূর্ণক $(n-1)$-এর সমান।

(ii) মনে করি যে সংখ্যাটি ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। (অর্থাৎ 0 এবং 1 এর মধ্যবর্তী।)

আমরা লক্ষ্য করি যে,

$$10^0 = 1$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = ·1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = ·01$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = ·001$$
$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = ·0001 ;$$ ইত্যাদি।

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী অঙ্ক শূন্য নয় এইরূপ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যা (যথা, ·3015), ·1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে। অতএব, 10-এর যে ঘাত এই প্রকারের সংখ্যা হইবে সেই ঘাতের সূচক-সংখ্যা -1 এবং 0-এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $-1+$ এক সামান্য ভগ্নাংশের সমান হইবে। অতএব, এই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক -1-এর সমান হইবে।

দশমিক বিন্দুর ঠিক পরবর্তী মাত্র একটি অঙ্ক শূন্য এইরূপ সংখ্যা, (যেমন, ·0785005) ·01 এবং ·1 অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-1}-এর মধ্যবর্তী।

অতএব, $10^x = \cdot0785005$ হইলে, x অবশ্যই -1 এবং -2-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ x-এর রূপ হইবে $-1\cdot\ldots\ldots$; x-এর দশমিক অংশ ধনাত্মক কল্পনা করিলে x-এর রূপ হইবে $-2+\cdot\ldots\ldots$। সুতরাং, x-এর অখণ্ড অংশ $\log\cdot0785005$-এর পূর্ণক -2 হইবে।

অনুরূপভাবে, $\cdot01$ এবং $\cdot001$ অর্থাৎ 10^{-2} এবং 10^{-3}-এর মধ্যবর্তী সংখ্যাগুলির প্রারম্ভের দশমিক বিন্দুর পর দুইটি শূন্য থাকিবে এবং এই সকল সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ -2 এবং -3-এর মধ্যবর্তী হইবে, অর্থাৎ লগারিদ্‌ম্-এর রূপ হইবে $-2\cdot\ldots\ldots = -3+\cdot\ldots\ldots$; অতএব, পূর্ণক হইবে -3 ; ইত্যাদি।

উপপাদ্য II. যে সমস্ত সংখ্যাগুলি একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত এবং যাহাদের মধ্যে পার্থক্য কেবলমাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থানে, সেই সমস্ত সংখ্যার লগারিদ্‌ম্-এর অংশগুলি অভিন্ন হইবে।

একটি উদাহরণ দ্বারা ইহা স্পষ্ট হইবে। আমরা 835107, 835107000, 83·5107, ·835107, ·000835107 এবং 8351·07—এই সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌ম্ আলোচনা করি।

এক্ষণে,
$$\log 835107000 = \log(835107 \times 1000) = \log 835107 + \log 1000 = \log 835107 + 3.$$

পুনরায়,
$$\log 83\cdot5107 = \log\frac{835107}{10000} = \log 835107 - \log 10000 = \log 835107 - 4$$

$$\log \cdot835107 = \log\frac{835107}{1000000} = \log 835107 - \log 1000000 = \log 835107 - 6.$$

$$\log \cdot000835107 = \log\frac{835107}{10^9} = \log 835107 - 9$$

$$\log 8351\cdot07 = \log\frac{835107}{100} = \log 835107 - 2.$$

এইখানে, যে-কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্ ও $\log 835107$-এর মধ্যে পার্থক্য একটি পূর্ণ সংখ্যার। সুতরাং, উক্ত সংখ্যাগুলির অংশক $\log 835107$-এর অংশকের সহিত সমান হইবে।

• বস্তুতঃ, একই ক্রমে সজ্জিত অনুরূপ অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যার পার্থক্য মাত্র দশমিক বিন্দুর অবস্থানজনিত হইলে, উহাদের অনুপাত 10-এর অখণ্ড ঘাতের সমান হইবে এবং ইহাদের লগারিদম্-এর পার্থক্য দেখা যাইবে কেবল পূর্ণকের মধ্যে।

উপরের উপপাদ্য দুইটি হইতে প্রমাণিত হয় যে, (i) **কোন সংখ্যার লগারিদম্-এর পূর্ণক কেবলমাত্র পর্য্যবেক্ষণের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় এবং (ii) অংশক নির্ণয় করিতে কেবলমাত্র সংখ্যাটি যে অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে, দশমিক বিন্দুর অবস্থান লক্ষ্য না করিলে কোন ক্ষতি হইবে না।**

অতএব, লগারিদম্-এর তালিকায় কেবলমাত্র অংশক দেওয়া থাকিলেই চলে এবং কার্য্যতঃ তাহাই দেওয়া থাকে। ইহাই সাধারণ লগারিদম্-এর বিশেষত্ব এবং সুবিধা।

14·7. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *Simplify* : $\log \dfrac{\sqrt[4]{5}\,.\,\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{(18\,.\,\sqrt{2})}}$, *and find its value, given* $\log 2 = \cdot 30103$ *and* $\log 3 = \cdot 4771213$.

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \log \frac{5^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{\left(18\,.\,2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}\left(2\,.\,3^2.2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \log \frac{10^{\frac{1}{4}}2^{\frac{1}{10}}}{2^{\frac{1}{4}}\,.\,2^{\frac{1}{3}}\,.\,3^{\frac{2}{3}}\,.\,2^{\frac{1}{6}}} = \log \frac{10^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{13}{20}}3^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \log 10^{\frac{1}{4}} - \log\left(2^{\frac{13}{20}} \times 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\log 10 - \left(\log 2^{\frac{13}{20}} + \log 3^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\log 10 - \tfrac{13}{20}\log 2 - \tfrac{2}{3}\log 3$$

$$= \tfrac{1}{4}\,.\,1 - \tfrac{13}{20}(\cdot 30103) - \tfrac{2}{3}(\cdot 4771213)$$

$$= \cdot 25 - \cdot 1956695 - \cdot 3180809$$

$$= -1 + \cdot 7362496 = \bar{1}\cdot 7362496.$$

দ্রষ্টব্য। $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$; অতএব, log 5-এর মান log 2-এর মান হইতে নির্ণয় করা যায়।

Ex. 2. *Prove that*

$$7 \log \tfrac{10}{9} - 2 \log \tfrac{25}{24} + 3 \log \tfrac{81}{80} = \log 2.$$

বাম পক্ষ $= \log \left(\frac{10}{9}\right)^7 - \log \left(\frac{25}{24}\right)^2 + \log \left(\frac{81}{80}\right)^3$

$$= \log \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^7 \times \left(\frac{81}{80}\right)^3}{\left(\frac{25}{24}\right)^2} = \log \left\{\left(\frac{10}{3^2}\right)^7 \times \left(\frac{3^4}{10 \times 2^3}\right)^3 \times \left(\frac{3 \times 2^3 \times 2^2}{10^2}\right)^2\right\}$$

$$= \log \left(\frac{10^7}{3^{14}} \times \frac{3^{12}}{10^3 \times 2^9} \times \frac{3^2 \times 2^{10}}{10^4}\right) = \log 2.$$

বিকল্প প্রমাণ:

বাম পক্ষ $= 7(\log 10 - \log 9) - 2(\log 25 - \log 24) + 3(\log 81 - \log 80)$

$$= 7\{\log(5 \times 2) - \log 3^2\} - 2\{\log 5^2 - \log(3 \times 2^3)\} + 3\{\log 3^4 - \log(5 \times 2^4)\}$$

$$= 7\{\log 5 + \log 2 - 2\log 3\} - 2\{2\log 5 - \log 3 - 3\log 2\} + 3\{4\log 3 - \log 5 - 4\log 2\}$$

$$= \log 2.$$

Ex. 3. *Find the number of digits in* 4^{15}, *having given* $\log 2 = \cdot 30103$.

$$\log 4^{15} = \log 2^{30} = 30 \log 2 = 30 \times \cdot 30103 = 9\cdot 0309.$$

অতএব, $\log 4^{15}$-এর পূর্ণক 9 বলিয়া, 4^{15} দশ অঙ্কের সংখ্যা।

Ex. 4. *Find approximately the* 7^{th} *root of* $35\cdot 28$, *having given* $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $\log 7 = \cdot 8450980$ *and* $\log 1197\cdot 342 = 3\cdot 0782184$.

মনে করি, $x = (35\cdot 28)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{7^2 \times 3^2 \times 2^3}{10^2}\right)^{\frac{1}{7}}$.

$$\therefore \quad \log x = \tfrac{1}{7}[2\log 7 + 2\log 3 + 3\log 2 - 2\log 10]$$

$$= \tfrac{1}{7}[2 \times \cdot 8450980 + 2 \times \cdot 4771213 + 3 \times \cdot 30103 - 2]$$

$= \cdot 0782184$. (প্রায়)

এক্ষণে $\log 1197\cdot 342 = 3\cdot 0782184$ বলিয়া,

$\log 1\cdot 197342 = \cdot 0782184$ (যেহেতু উভয়ের অংশক সমান, কিন্তু 1 অঙ্কের সংখ্যা বলিয়া পূর্ণক শূন্য)

$\therefore \quad x = 1\cdot 197342.$ (আসন্ন মান)।

Ex. 5. *Obtain an approximate numerical solution of* $2^x . 3^{2x} = 100$, *having given* $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 47712$.

$$2^x . 3^{2x} = 100 = 10^2, \quad \therefore \log (2^x . 3^{2x}) = \log 10^2$$

অর্থাৎ, $x \log 2 + 2x \log 3 = 2 \log 10 = 2$.

$$\therefore \quad x = \frac{2}{\log 2 + 2 \log 3} = \frac{2}{\cdot 30103 + 2 \times \cdot 47712}$$
$$= 1 \cdot 5933 \quad (\text{প্রায়})$$

Ex. 6. *If* $y = a^{\frac{1}{1-\log x}}$, $z = a^{\frac{1}{1-\log y}}$, *then* $x = a^{\frac{1}{1-\log z}}$, *all the logarithms being calculated to the base a.*

$$\because \quad y = a^{\frac{1}{1-\log x}}, \qquad \therefore \quad \log_a y = \frac{1}{1-\log_a x}. \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\because \quad z = a^{\frac{1}{1-\log y}}, \qquad \therefore \quad \log_a z = \frac{1}{1-\log_a y} \qquad \cdots \quad (2)$$

(2) হইতে আমরা পাই $\log_a y = 1 - \frac{1}{\log_a z} = \frac{\log_a z - 1}{\log_a z}$.

অতঃপর (1) -হইতে,

$$\log_a x = 1 - \frac{1}{\log_a y} = 1 - \frac{\log_a z}{\log_a z - 1} = \frac{-1}{\log_a z - 1} \quad \frac{1}{1 - \log_a z}$$

$$\therefore \quad x = a^{\frac{1}{1-\log z}}.$$

Ex. 7. *Evaluate* $\log_2 \sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{\cdots}}}$ *to* ∞ *assuming it to have a definite value.*

মনে করি, $x = \sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{2 \cdots}}}$ to ∞

$\therefore \quad x = \sqrt{2x}$ বা $x^2 - 2x = 0$. কিন্তু $x \neq 0$. $\therefore x = 2$.

এখন প্রদত্ত রাশি $= \log_2 x = \log_2 2 = 1$.

Ex. 8. *If* $a^m = b^n$, *show that* $n \log_a x = m \log_b x$.

মনে করি, $\log_a x = a'$ এবং $\log_b x = b'$.

$\therefore \quad a^{a'} = x$ এবং $b^{b'} = x$. সুতরাং, $a^{a'} = b^{b'}$.

উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে, $a' \log a = b' \log b$.

$$\text{বা,} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{\log b}{\log a} \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন প্রদত্ত সমীকরণ $a^m = b^n$-এর উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে আমরা পাই $m \log a = n \log b$.

$$\therefore \quad \frac{m}{n} = \frac{\log b}{\log a} \qquad \cdots \quad (2)$$

অতএব (1) এবং (2) হইতে আমরা জানি যে, $\frac{a'}{b'} = \frac{m}{n}$.

অর্থাৎ, $\frac{\log_a x}{\log_b x} = \frac{m}{n}$. $\therefore \quad n \log_a x = m \log_b x$.

Ex. 9. *Prove that*

(i) $x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

(i) $\log (x^{\log y}) = \log y \log x = (\log x) \cdot \log y = \log (y^{\log x})$

$\therefore \quad x^{\log y} = y^{\log x}$.

(ii) মনে করি,

$P = x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y}$.

$\therefore \quad \log P = (\log y - \log z) \log x + (\log z - \log x) \log y + (\log x - \log y) \log z = 0$.

$\therefore \quad P = 1$.

অর্থাৎ, $x^{\log y - \log z} \times y^{\log z - \log x} \times z^{\log x - \log y} = 1$.

Ex. 10. *If* $a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, *then* $x \log \left(\frac{b}{a}\right) = \log a$.

[C. U. 1937]

$\because \quad a^{3-x} b^{5x} = a^{x+5} b^{3x}$, উভয় পক্ষের লগারিদম্ লইলে,

$(3-x) \log a + 5x \log b = (x+5) \log a + 3x \log b$

বা, $x [\log a + 3 \log b + \log a - 5 \log b] = 3 \log a - 5 \log a$

বা, $x [2 \log a - 2 \log b] = -2 \log a$

বা, $x (\log b - \log a) = \log a$. $\therefore \quad x \log \frac{b}{a} = \log a$.

দ্রষ্টব্য। এইপ্রকার রূপবিশিষ্ট সমীকরণকে সূচক সমীকরণ (Exponential equation) বলা হয়। Ex. 5. এরও এইরূপ।

Examples XIV(a)

[*Use the values :* $\log 2 = \cdot 30103$, $\log 3 = \cdot 4771213$, $\log 7 = \cdot 8450980$ *when required*]

1. Find the logarithm of

(i) 1728 to the base $2\sqrt{3}$, (ii) $\cos^3 a$ to the base $\sec a$.

2. Find $\log_{10} 10000$.

3. Show that $\log_{10} 2$ lies between $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$. [C. U. 1926]

4. Prove that

(i) $\log_a m \times \log_b n = \log_b m \times \log_a n$.

(ii) $\log_2 \log_2 \log_2 16 = 1$.

5. If $\log_e m + \log_e n = \log_e (m+n)$, find m as a simple function of n.

6. Prove that if a series of numbers be in G.P., their logarithms are in A.P.

7. Prove that $2 \log a + 2 \log a^2 + 2 \log a^3 + \cdots\cdots + 2 \log a^n$
$= n(n+1) \log a$.

8. If x is positive and less than unity, show that $\log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8) + \cdots$ to $\infty = -\log(1-x)$.

9. Simplify

(i) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(ii) $\dfrac{\log \sqrt{27} + \log 8 - \log \sqrt{1000}}{\log 1 \cdot 2}$.

10. Find $\log (\cdot 0025)^{\frac{1}{3}}$ and $\log \left(\frac{5}{72}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

11. Prove that

(i) $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$.

(ii) $\log_a x = \log_b x \times \log_c b \times \log_d c \cdots \times \log_n m \times \log_a n$.

12. Show that

(i) $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$.

(ii) $7 \log \frac{15}{16} + 6 \log \frac{8}{3} + 5 \log \frac{2}{5} + \log \frac{32}{25} = \log 3$.

13. Extract the fifth root of 84, having given

$\log 2425805 = 6 \cdot 3848559$.

14. Calculate $(\cdot 0020736)^{\frac{1}{7}}$, having given
$\log 41369 = 4\cdot 6166750.$

15. Simplify

(i) $\log \sqrt[7]{\dfrac{8^{\frac{1}{5}} \times 14^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{72} \times \sqrt[5]{60}}}$.

(ii) $\sqrt[3]{\dfrac{7\cdot 2 \times 6\cdot 3}{62\cdot 5}}$, having given
$\log 898665 = 5\cdot 9535977.$

16. Find the value of $64\{1-(1\cdot 05)^{-20}\}$, having given
$\log 24121 = 4\cdot 382394.$

17. Find the number of digits in (i) 2^{40}, (ii) 3^{11}, (iii) $(540)^{9}$.

18. Find the number of zeros after the decimal point before the first significant digit in the expressions :

(i) $(\cdot 024)^{15}$. (ii) $\left(\dfrac{1}{4\cdot 05}\right)^{8}$. (iii) $\left(\cdot 0\dot{2}5\dot{9}\right)^{50}$.

19. Solve the equations

(i) $3^{x} = 2$. (ii) $3^{x-4} = 7$. (iii) $5^{6x} \div 7^{x+2} = 3^{2x-3}$.

(iv) $\left.\begin{array}{l} 2^{x} = 3^{y} \\ 2^{y+1} = 3^{x-1} \end{array}\right\}$ (v) $\left.\begin{array}{l} 7^{x+y} \times 3^{2x+y} = 9 \\ 3^{x-y} \div 2^{x-2y} = 3^{x} \end{array}\right\}$

20. (i) If $\log(x^{2}y^{3}) = a$, $\log\left(\dfrac{x}{y}\right) = b$, find $\log x$ and $\log y$.

(ii) If $a^{2}+b^{2} = 7ab$, show that
$\log\{\frac{1}{3}(a+b)\} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.

21. If $\dfrac{\log x}{y-z} = \dfrac{\log y}{z-x} = \dfrac{\log z}{x-y}$, show that $x^{x}y^{y}z^{z} = 1$.

22. Why is $\log(1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$?

23. If $a, b, c, \ldots\ldots$ be in G.P., show that
$\log_{a} x, \log_{b} x, \log_{c} x \ldots\ldots\ldots\ldots$ are in H.P.

24. If $xy^{l-1} = a$, $xy^{m-1} = b$, $xy^{n-1} = c$, prove that
$(m-n)\log a + (n-l)\log b + (l-m)\log c = 0.$

25. If $\dfrac{x(y+z-x)}{\log x} = \dfrac{y(z+x-y)}{\log y} = \dfrac{z(x+y-z)}{\log z}$, show that
$y^{z}z^{y} = z^{x}x^{z} = x^{y}y^{x}$.

ANSWERS

1. (i) 6. (ii) -3. **2.** -2. **5.** $\frac{n}{n-1}$. **9.** (i) 1. (ii) $1\frac{1}{2}$.

10. $\bar{1}$·1173942, ·3861209. **13.** 2·425805. **14.** ·41369.

15. (i) $\bar{1}$·8969092. (ii) ·898665. **16.** 39·879.

17. (i) 13. (ii) 6. (iii) 25. **18.** (i) 24. (ii) 4. (iii) 79.

19. (i) $\frac{\log 2}{\log 3}$, *i.e.*, ·63....... (ii) $4+\frac{\log 7}{\log 3}$, *i.e.*, 5·77...

(iii) $\frac{2\log 7-3\log 3}{6\log 5-\log 7-2\log 3}$, *i.e.*, ·108...

(iv) $x=\frac{\log 3}{\log 3-\log 2}=2·71$ nearly, $y=\frac{\log 2}{\log 3-\log 2}=1·71$ nearly.

(v) $\frac{2b(2a-b)}{5ab+3ac-2b^2-bc}$ and $\frac{2ab}{5ab+3ac-2b^2-bc}$,

where $a=\log 2$, $b=\log 3$, $c=\log 7$.

20. (i) $\log x=\frac{a+3b}{5}$, $\log y=\frac{a-2b}{5}$.

14·8. লগারিদম্ এবং কোণানুপাতের তালিকা।

পাঁচ আসন্ন দশমিক স্থান পর্যন্ত কয়েকটি তালিকা পুস্তকের শেষে সন্নিবিষ্ট করা হইয়াছে। নিম্নে তালিকাগুলির বিষয়বস্তু ব্যাখ্যা করা হইতেছে।

প্রথম তালিকায় 1 হইতে 10,000 সংখ্যাগুলির (অর্থাৎ যে সমস্ত সংখ্যা চার বা তাহার কম অঙ্কবিশিষ্ট তাহাদের) লগারিদম্-এর অংশক দেওয়া হইয়াছে (দশমিক বিন্দু দেওয়া হয় নাই)। অনু. 14·6-এর নিয়ম অনুযায়ী পূর্ণক নির্ণয় করিয়া নির্ণেয় সংখ্যার লগারিদম্ বাহির করিতে হইবে। তালিকার প্রধান অংশে দেওয়া হইয়াছে তিন অঙ্কের সংখ্যার লগারিদম্-এর অংশক এবং পার্শ্বস্থ অংশে সন্নিবিষ্ট হইয়াছে চতুর্থ অঙ্কের জন্য মধ্যক অন্তর (mean difference)। অতএব, চারি অঙ্কের সংখ্যার লগারিদম্ নির্ণয় করিতে হইলে তালিকার প্রধান অংশ হইতে প্রথম তিন অঙ্কের সংখ্যার অংশকের সহিত চতুর্থ অঙ্কের সংশ্লিষ্ট মধ্যক অন্তর যোগ করিতে হইবে। মধ্যক অন্তরের বৃদ্ধির ক্ষেত্রে তালিকাতে কেবল সার্থক (significant) অঙ্কগুলি লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে; ইহার বামে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া পাঁচ অঙ্কের দশমিকে পরিবর্তিত করিতে হইবে (কারণ এইক্ষেত্রে তালিকাটিতে পাঁচ দশমিক পর্যন্ত আছে)। যথা: মধ্যক অন্তরের তালিকায় 24 লিখিত থাকিলে উহাকে ধরিতে হইবে ·00024;

উদাহরণস্বরূপ log 2·697 এর মান নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে মূল তালিকা হইতে log 269 এর অংশক নির্ণয় করি ; উহা হইবে ·42975 ; ইহাদের একই সারি হইতে দেখা যায় যে, 7-এর জন্য মধ্যক অন্তর 115 অর্থাৎ log 2697 এর অংশক হইবে ·42975 + ·00115 অর্থাৎ ·43090. পুনরায় log 2·697-এর পূর্ণক শূন্য, অর্থাৎ log 2·697 এর মান 0·43090.

দ্বিতীয় তালিকায় আছে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত কোণগুলির সাইন ও কোসাইনের মান (এই সমস্ত সাইন ও কোসাইনকে স্বাভাবিক সাইন ও কোসাইন [Natural sines and Natural cosines] বলিয়া অভিহিত করা হইয়া থাকে); সাইনের মান লিখিত হইয়াছে উপরের বামদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপর হইতে নীচে এবং বামদিক হইতে ডানদিকে ; আর কোসাইন লিখিত হইয়াছে নীচের দক্ষিণদিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে এবং ডানদিক হইতে বামদিকে। তালিকাটি এমনভাবে সাজানো হইয়াছে যে, যে-কোন কোণের সাইন উহার পূরক কোণের কোসাইন এবং ইহার ফলে একই তালিকাতে সাইন এবং কোসাইন উভয় মানই লিপিবদ্ধ করা সম্ভব হইয়াছে। মূল তালিকাতে সাইন বা কোসাইন 10′ ব্যবধানে লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে এবং পার্শ্বস্থ মধ্যক অন্তর তালিকায় প্রতি 1′ ব্যবধানে সাইন বা কোসাইনের ব্যবধান লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে। মনে রাখিতে হইবে যে, কোণ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পাইতে থাকে, তখন সাইন ক্রমান্বয়ে 0 হইতে 1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় এবং কোসাইন ক্রমান্বয়ে 1 হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইতে থাকে বলিয়া, **কোণ বর্ধিত হইলে মধ্যক অন্তর সাইনের ক্ষেত্রে যোগ কিন্তু কোসাইনের ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।** অধিকন্তু প্রথম তালিকার ন্যায় মধ্যক অন্তর-তালিকায় কেবলমাত্র সার্থক অঙ্কগুলিই লিপিবদ্ধ করা হইয়াছে এবং প্রয়োজনমত বামদিকে উপযুক্ত-সংখ্যক শূন্য বসাইয়া **পাঁচ দশমিক স্থান** পূর্ণ করিতে হইবে। যেমন, তালিকার সাহায্যে $\sin 53°23' = \cdot80212 + \cdot00052 = \cdot80264$ এবং $\cos 29°42' = \cdot86892 - \cdot00029 = \cdot86863$.

অনুরূপভাবে, তৃতীয় তালিকার অন্তর্ভুক্ত করা হইয়াছে 0° হইকে 90° পর্যন্ত 1′ ব্যবধানে ট্যানজেণ্ট এবং কো-ট্যানজেণ্টের মান। মধ্যক অন্তরের তালিকার অংকগুলিকে পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত পূর্ণ করিয়া **কোণের বর্ধিত মিনিট সংখ্যার জন্য ট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে যোগ এবং কোট্যানজেণ্টের ক্ষেত্রে বিয়োগ করিতে হইবে।**

চতুর্থ তালিকায় আছে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্‌মিক সাইন এবং কোসাইন (মধ্যক অন্তর-তালিকা সহযোগে)। θ-র লগারিদ্‌মিক সাইনের প্রতীক **L sin θ** এবং উহা **10+log sin θ**-র সমান, অনুরূপভাবে θ-র লগারিদ্‌মিক কোসাইনের প্রতীক **L cos θ** এবং উহার মান **10+log cos θ ;** কোণানুপাতের ক্ষেত্রে মনে রাখিতে হইবে যে, 0° হইতে 90° পর্যন্ত সাইন এবং কোসাইনের মান, 0° হইতে 45° পর্যন্ত ট্যানজেণ্টের মান এবং 45° হইতে 90° পর্যন্ত কোট্যানজেণ্টের মান এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অতএব, এই সমস্ত সংখ্যার লগারিদম্ ঋণরাশি। অতএব, **তালিকাকে ঋণরাশি মুক্ত করিবার জন্য কোণানুপাতের লগারিদম্ তালিকাভুক্ত করিবার পূর্বে উহার সহিত 10 যোগ করিয়া লওয়া হয়।** সুতরাং, তালিকাটি হইতে log sin θ এবং log cos θ-র পরিবর্তে L sin θ এবং L cos θ-র মান পাওয়া যায়।

পঞ্চম তালিকায় মধ্যক অন্তর-তালিকা সহযোগে 1′ ব্যবধানে 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্ট ($L \tan\theta = 10 + \log\tan\theta$) এবং লগারিদ্‌মিক কোট্যানজেণ্ট ($L \cot\theta = 10 + \log\cot\theta$)-এর মান দেওয়া আছে।

14·9. সমানুপাতিক অংশ সম্পর্কীয় তথ্য : (Principle of proportional parts.)

মনে করি যে, প্রথম তালিকা হইতে প্রাপ্ত log 6257 এবং log 6258-এর মানের সাহায্যে log 6257·6-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে, বা তৃতীয় তালিকা হইতে প্রাপ্ত tan 53°23′ এবং tan 53°24′-এর মানের সাহায্যে tan 53°23′20″-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে ; অথবা চতুর্থ তালিকা হইতে প্রাপ্ত L cos 37°42′ এবং L cos 37°43′-এর মানের সাহায্যে L cos 37°42′48″-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে ; কিভাবে তাহা সম্ভব ?

এই সমস্ত ক্ষেত্রে সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য প্রয়োগ করা হয়। তথ্যটি নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যাইতে পারে :—

"একটি চলরাশি x-এর নিয়মিত, স্বল্পব্যবধানযুক্ত বিভিন্ন মান অনুযায়ী, x-এর উপর নির্ভরশীল অপর একটি রাশির অনুরূপ বিভিন্ন মান নির্ণয় করিয়া তালিকাভুক্ত করিলে সাধারণতঃ দেখা যাইবে যে, নির্ভরশীল রাশির (ইহাকে বলা হয় যুক্তির অপেক্ষক বা function) স্বল্পপরিবর্তন, x-এর মানের (ইহাকে বলা হয় যুক্তি বা argument) স্বল্পপরিবর্তনের সমানুপাতী হইবে।"

আমরা উল্লিখিত তথ্য সত্য বলিয়া গ্রহণ করিব। উপযুক্ত সর্ত উল্লেখপূর্বক ইহার পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ Calculus বা কলন শাস্ত্রের প্রয়োগ ব্যতিরেকে সম্ভব নয়। যে সমস্ত তালিকার ব্যবহারিক ক্ষেত্রে আমরা এই তথ্য প্রয়োগ করিব সেই সমস্ত ক্ষেত্রে ইহার সত্যতা প্রায় নির্বিচারে গ্রহণ করা যায়।

নিম্নলিখিত উদাহরণে এই তথ্যের প্রয়োগ দেখানো হইতেছে :

Ex. 1. *Given log* 63374 = 4·8019111 *and log* 63375 = 4·8019180, *find log* 63·3743 *and find the number whose logarithm is* $\bar{2}$·8019136.

এক্ষেত্রে, $\log 63375 = 4{\cdot}8019180$

এবং, $\log 63374 = 4{\cdot}8019111.$

সুতরাং, সংখ্যাটি 1 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে ·0000069 (সাধারণতঃ "1-এর জন্য অন্তর 69"—এইরূপ লিখিত হয়)। অতএব, সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় তথ্য অনুসারে সংখ্যাটি ·3 বৃদ্ধি পাইলে লগারিদম্ বৃদ্ধি পাইবে $·3 \times ·0000069$ বা ·00000207 বা ·0000021 (7 দশমিক স্থান পর্যন্ত)।

সুতরাং, $\log 63374{\cdot}3 = 4{\cdot}8019111 + {\cdot}0000021 = 4{\cdot}8019132.$

$\therefore \log 63{\cdot}3743 = 1{\cdot}8019132.$

পুনরায় 4·8019136 সংখ্যাটি 4·8019111 এবং 4·8019180-র মধ্যবর্তী এবং প্রথমটির সহিত ইহার অন্তর ·0000025; অতএব, 4·8019136 অবশ্যই 63374 ও 63375—এই দুইটি সংখ্যার মধ্যবর্তী কোন সংখ্যার লগারিদম্। মনে করি যে, সংখ্যাটি $63374 + x$.

1-এর জন্য অন্তর 69 (অর্থাৎ ·0000069) এবং x-এর জন্য অন্তর 25 (অর্থাৎ ·0000025) বলিয়া সমানুপাতিক অংশ-সম্পর্কীয় নিয়ম অনুযায়ী

$$69 : 25 = 1 : x, \quad \text{অর্থাৎ} \quad x = \tfrac{25}{69} = {\cdot}36\cdots.$$

অতএব, $\log 63374{\cdot}36\cdots = 4{\cdot}8019136.$

এক্ষণে নির্ণেয় সংখ্যাটির লগারিদম্ $\bar{2}$·8019136 অর্থাৎ অংশক log 63374·36-এর অংশকের সমান। সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাটি 63374·36-এর ন্যায় একই ক্রমে সজ্জিত একই অঙ্কের দ্বারা গঠিত হইবে এবং ইহার পূর্ণক −2 বলিয়া সংখ্যাটি হইবে ·06337436···.

Ex. 2. (i) *Given L sin* 37° 43′ 50″ = 9·7867152

L sin 37°44′ = 9·7867424,

find L sin 37°43′56″.

(ii) *Given* $L \tan 79° 51' 40'' = 10·7475657$
$L \tan 79° 51' 50'' = 10·7476872$,
find the angle whose L tan is 10·7476532. [C. U. 1921]

(i) এর ক্ষেত্রে 10″ (কোণের অন্তর)-এর জন্য L sin এর মানের অন্তর $= 272$ (অর্থাৎ ·0000272).

∴ 6″ এর জন্য অন্তর $= \frac{6}{10} \times 272 = 163·2$ (অর্থাৎ ·00001632).

∴ $L \sin 37° 43' 56'' = 9·7867152 + ·0000163 = 9·7867315$.

(ii) এর ক্ষেত্রে যে-কোণের $L \tan = 10·7476532$, তাহা 79° 51′ 40″ এবং 79°51′50″ এর মধ্যবর্তী। মনে করি যে, নির্ণেয় কোণটি $79° 51' 40'' + x''$.

এক্ষণে, 10″ (কোণের অন্তর)-এর জন্য L tan-এর মানের অন্তর 1215 অর্থাৎ (·0001215).

এবং x''-এর জন্য অন্তর 875 (অর্থাৎ ·0000875),.

[∵ $10·7476532 - 10·7475657 = ·0000875$.]

∴ $\frac{x}{10} = \frac{875}{1215}$ বা $x = 7·2$ (প্রায়)

∴ নির্ণেয় কোণ 79° 51′ 47″·2.

Ex. 3. *Given* $\cos 53° 17' = ·5257191$ *and diff. for* $1' = 2474$, *find* $\cos 58° 17' 20''$.

1′ অর্থাৎ 60″-এর জন্য অন্তর $= 2474$.

20″ „ „ „ $= \frac{20}{60} \times 2474 = 825$. (প্রায়)

কোণ বৃদ্ধি পাইলে কোসাইন হ্রাস পায় বলিয়া,

$\cos 58° 17' 20'' = ·5257191 - ·0000825 = ·5256366$.

Examples XIV(b)

1. Given $\log 18·906 = 1·2765997$ and $\log 18·907 = 1·2766226$, find log 1890·635.

2. Given $\log 69714 = 4·8433200$, $\log 69715 = 4·8433262$, find $\log (·00069714 5)^{\frac{1}{5}}$.

3. Given $\log 37602 = 4·5752109$, $\log 37601 = 4·5751994$, find the number whose lagarithm is 1·5752086.

4. Given $\log 3 = \cdot 4771213$

$\log 74008 = 4\cdot 8692787$, diff. for $1' = 59$,

find $(\cdot 09)^{\frac{1}{8}}$.

5. Given $\cos 32° \ 16' = \cdot 8455726$ and $\cos 32° \ 17' = \cdot 8454172$, find the value of $\cos 32° \ 16' \ 24''$ and find the angle whose cosine is $\cdot 8455176$.

6. Find $\tan 38° \ 24' \ 37\cdot 5''$, having given

$\tan 38° \ 24' = \cdot 7925902$ and $\tan 38° \ 25' = \cdot 7930640$.

7. Given $L \sin 44° \ 17' = 9\cdot 8439842$

and $L \sin 44° \ 18' = 9\cdot 8441137$,

find $L \sin 44° \ 17' \ 33''$. Deduce the value of

$L \operatorname{cosec} 44° \ 17' \ 33''$.

8. Given $L \sin 36° \ 24' = 9\cdot 7733614$

$L \sin 36° \ 25' = 9\cdot 7735327$,

find the angle whose $L \sin$ is $9\cdot 7734642$.

9. If $L \cot 53° \ 13' = 9\cdot 8736937$

$L \cot 53° \ 14' = 9\cdot 8734302$,

find θ where $L \cot \theta = 9\cdot 8734523$.

10. Given $L \tan 22° \ 37' = 9\cdot 6197205$, diff. for $1' = 3557$, find the value of $L \tan 22° \ 37' \ 22''$ and the angle whose $L \tan$ is $9\cdot 6195283$.

11. Prove that, θ being any acute angle,

$$L \sin \theta + L \operatorname{cosec} \theta = L \cos \theta + L \sec \theta$$
$$= L \tan \theta + L \cot \theta = 20.$$

12. Given $L \cos 36° \ 40' = 9\cdot 9042411$, find $L \sec 36° \ 40'$.

13. Given $L \cos 34° \ 44' = 9\cdot 9147729$, $L \cos 34° \ 45' = 9\cdot 9146852$, find the value of $L \cos 34° \ 44' \ 27''$.

14. Given $L \sin 36° \ 40' = 9\cdot 7760897$

$L \cos 36° \ 40' = 9\cdot 9042411$,

find $L \tan 36° \ 40'$.

15. Prove that the difference of tabular logarithms of any two ratios is equal to the difference of the logarithms of those two ratios.

16. If $\sin\theta = \cdot 8$, find θ,
given $\log 2 = \cdot 3010300$,
$L \sin 53^\circ 7' = 9 \cdot 9030136$, $L \sec 36^\circ 52' = 10 \cdot 0968916$.

17. Find the value of

$$\frac{\sin 34^\circ 17' \times \cos 77^\circ 23'}{\tan 27^\circ 12'}$$

given $L \sin 12^\circ 37' = 9 \cdot 3393$, $L \cos 55^\circ 43' = 9 \cdot 7507$,
$L \tan 62^\circ 48' = 10 \cdot 2891$, and $\log 23 \cdot 94 = 1 \cdot 3791$.

ANSWERS

1. 3·2766077. **2.** $\bar{1}$·3686646. **3.** 37·6018. **4.** ·7400827.
5. ·8465104 ; 32° 16′ 21″. **6.** ·7928863.
7. 9·8440554, 10·1559446. **8.** 36° 24′ 36″. **9.** 53° 13′ 55″.
10. 9·6198509 ; 22° 36′ 28″. **12.** 10·0957589. **13.** 9·9147334.
14. 9·8718486 **16.** $\theta = 50^\circ 7' 48''$ nearly. **17.** ·2394.

পঞ্চদশ অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

(Solution of Triangles)

15·1. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ, মোট এই ছয়টি অংশ। অবশ্য ইহারা পরস্পর নিরপেক্ষ নয়, ইহারা ত্রয়োদশ অধ্যায়ে প্রমাণিত সূত্রাবলীর দ্বারা সংশ্লিষ্ট। বস্তুতঃ, মাত্র তিনটি অংশ দেওয়া থাকিলে অন্যান্য অংশগুলিও তাহাদের সাহায্যে সাধারণতঃ নির্ণয় করা যায় এবং সংশ্লিষ্ট ত্রিভুজটির সম্পূর্ণ বৈশিষ্ট্যই নির্ণীত হয়। নিম্নলিখিত বিভিন্ন ক্ষেত্রগুলি হওয়া সম্ভব :

(1) তিনটি বাহু দেওয়া থাকিতে পারে,

(2) তিনটি কোণ দেওয়া থাকিতে পারে,

(3) দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূত কোণ দেওয়া থাকিতে পারে,

(4) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু দেওয়া থাকিতে পারে,

(5) দুইটি বাহু এবং একটি বিপরীত কোণ দেওয়া থাকিতে পারে।

আমরা এইগুলি সম্বন্ধে একে একে আলোচনা করিব।

15·2. তিনটি বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান (Three sides given).

মনে করি, ABC ত্রিভুজের a, b, c-এই তিনটি বাহু দেওয়া আছে। যে-কোন দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, জ্যামিতিক প্রণালীতে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করা যাইবে এবং কেবলমাত্র একটি ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে অর্থাৎ ইহার কোণগুলির মাত্রাও নির্দিষ্ট হইবে। যে-কোন কোণ, যথা A, নির্ণয় করিতে হইলে আমরা

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

এই সূত্রটি প্রয়োগ করিয়া $\cos A$ নির্ণয় করিতে পারি; পরে কোসাইনের তালিকার সাহায্যে A-এর মান নির্ণয় করিতে পারি। স্পষ্টই দেখা যায় যে,

কোণটি একটি ত্রিভুজের কোণ বলিয়া উহা 0 এবং π-এর মধ্যবর্তী হইবে, এবং এই সীমার মধ্যে নির্দিষ্ট কোসাইনবিশিষ্ট কোণের কেবলমাত্র একটি মান থাকিবে। অতএব, কোণটির মান নির্দিষ্টভাবে নির্ণীত হইবে।

এইস্থলে আমরা একটি বিষয় পরিষ্কার করিতে চাই। যদিও ব্যবহৃত সূত্রটি সত্য, তবুও যে তালিকা হইতে কোণগুলির মান নির্ণয় করা হয় তাহাতে কোসাইনের আসন্ন মান দেওয়া থাকে বলিয়া নির্ণীত মানগুলিও কোণগুলির আসন্ন মান মাত্র। কলন (Calculus)-এর সাহায্যে উচ্চতর গণিতে প্রমাণিত হইয়াছে যে **আসন্নমানযুক্ত তালিকা হইতে যদি কোণগুলি নির্ণীত হয় তাহা হইলে উৎকৃষ্টতম ফল পাওয়া যায় লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্টের সাহায্যে নির্ণীত মান হইতে ;** কারণ, চারি আসন্ন মানযুক্ত L tan-এর তালিকা হইতে প্রাপ্ত মান, আসন্নমানযুক্ত সাইন বা কোসাইনের তালিকা হইতে প্রাপ্ত মান অপেক্ষা বিশুদ্ধতর হইবে।

সুতরাং, কোন উপযুক্ত ট্যানজেণ্ট সূত্র জানা থাকিলে আমরা তাহাই ব্যবহার করিব। সেইজন্য বাস্তব ক্ষেত্রে A নির্ণয় করিতে হইলে

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \qquad [\ s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)\ ]$$

এই সূত্রটির প্রয়োগই বাঞ্ছনীয়।

উভয়পক্ষের লগারিদ্‌ম্ লইয়া 10 যোগ করিলে L $\tan\frac{A}{2}$-র মান নির্ণীত হয় এবং তাহার সাহায্যে $\frac{A}{2}$ অর্থাৎ A নির্ণয় করা যায়। অনুরূপভাবে B এবং C-ও নির্ণীত হইতে পারে।

যদি কোনও ক্ষেত্রে $\tan\frac{A}{2}$-র মান কোন বিশিষ্ট কোণের মানের সহিত সমান হয় তাহা হইলে লগারিদ্‌ম্-এর প্রয়োগ নিষ্প্রয়োজন।

Ex. *The sides of a triangle are 2, 3, 4. Find the greatest angle, having given*

$$log\ 2 = \cdot 30103,\ log\ 3 = \cdot 4771213.$$

$$L\ tan\ 52°14' = 10\cdot 1108395,\ L\ tan\ 52°15' = 10\cdot 1111004.$$

এক্ষেত্রে, $s = \frac{1}{2}(2+3+4) = \frac{9}{2}.$

বৃহত্তম বাহু 4-কে a-দ্বারা চিহ্নিত করিলে, বৃহত্তম কোণ A (a-এর বিপরীত কোণ) নিম্নলিখিতভাবে নির্ণীত হইবে :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(\frac{9}{2}-2)(\frac{9}{2}-3)}{\frac{9}{2}(\frac{9}{2}-4)}}$$

$$=\sqrt{\frac{5\,.\,3}{9\,.\,1}}=\sqrt{\frac{10}{2\,.\,3}}.$$

$\therefore\quad L\tan\frac{1}{2}A=10+\frac{1}{2}(\log 10-\log 2-\log 3)$

$=10+\frac{1}{2}(1-\cdot30103-\cdot4771213)=10\cdot1109244.$

এক্ষণে, $L\tan\frac{1}{2}A$ সংখ্যাটি $L\tan 52°14'$ এবং $L\tan 52°15'$-এর মধ্যবর্তী, অর্থাৎ $\frac{1}{2}A$ কোণ $52°14'$ এবং $52°15'$-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে করি যে, $\frac{1}{2}A=52°14'x''$.

অতএব, x''-এর জন্য অন্তর $=\cdot0000849$,

এবং $1'$ অর্থাৎ $60''$-এর জন্য অন্তর $\cdot0002609$.

$\therefore\quad \frac{x}{60}=\frac{849}{2609}$ বা $x=\frac{60\times849}{2609}=19\cdot5$ (প্রায়)

অতএব, $\frac{1}{2}A=52°14'19''\cdot5$ অর্থাৎ, $A=104°28'39''$.

15·3. তিনটি কোণ নির্দিষ্ট হইলে ত্রিভুজের সমাধান (Three angles given).

এক্ষেত্রে ত্রিভুজের সম্পূর্ণ সমাধান অসম্ভব, কারণ তিনটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণবিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কিত করা সম্ভব। এই সমস্ত ত্রিভুজগুলি সদৃশকোণী (equiangular) বলিয়া সদৃশ (similar) হইবে ; ইহাদের বাহুগুলির অনুপাত

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$-এই সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। সুতরাং,

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

Ex. *The angles of a triangle are in the ratio* **2 : 3 : 7.** *Prove that the sides are in the ratio of* $\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$.

কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 7 এবং উহাদের সমষ্টি 180° বলিয়া, কোণগুলি যথাক্রমে 30°, 45° এবং 105° হইবে।

অতএব, বাহুগুলির অনুপাত $= \sin 30^\circ : \sin 45^\circ : \sin 105^\circ$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 2 : (\sqrt{3}+1).$$

Examples XV(a)

1. The sides of a triangle are 24, 22, 14 ; find the least angle, given $L \tan 17^\circ 33' = 9\cdot500042$, diff. for $1' = 439$.

2. The sides of a triangle are 50, 36 and 28 ; find the greatest angle, having given

$$\log 19 = 1\cdot2787536, \qquad \log 29 = 1\cdot4623980$$
$$L \tan 51^\circ 0' = 10\cdot0916308, \; L \tan 51^\circ 1' = 10\cdot0918891.$$

3. The sides of a triangle are 9, 10 and 11 ; find the angle opposite to the side 10, given

$$L \tan 29^\circ 30' = 9\cdot7526420, \; L \tan 29^\circ 29' = 9\cdot7523472,$$
$$\log 2 = \cdot30103.$$ [C. U. 1943]

4. The sides of a triangle are 2, 3, 4. Find all the angles correctly to degrees and minutes by the help of mathematical tables.

5. (i) The sides of a triangle are 15, 19, 24 ; find the greatest angle of the triangle.

Given $\log 5\cdot7 = \cdot75587$, $L \cos 88^\circ 59' = 8\cdot24903$
diff. for $1' = 718$. [C. U. 1936]

(ii) Find the greatest angle in degrees, minutes and seconds in a triangle whose sides are 5, 6, 7, having given

$$\log 6 = \cdot7781513$$
$$L \cos 39^\circ 14' = 9\cdot8890644, \text{ diff. for } 60'' = \cdot0001032.$$

6. (i) The sides of a triangle are 7, 8, 9 ; solve the triangle.
[C. U. 1938]

(ii) If $a = 35$, $b = 40$, $c = 66$, determine the greatest angle.
[C. U. 1945]

[Use *Mathematical Tables*]

7. Given $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} - 1$; solve the triangle.

8. Given $a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3} + 1$; solve the triangle.

9. If $a=7$, $b=5$, $c=8$, solve the triangle.
Given $\cos 38° 11' = \frac{11}{14}$.

10. If $a=3+\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{3}$, solve the triangle.

11. The angles of a triangle are 105°, 60° and 15°; find the ratio of the sides.

12. If $A=45°$, $B=60°$, show that $c:a=(\sqrt{3}+1):2$.

13. The angles of a triangle are as 1 : 2 : 7 ; find the ratio of the greatest side to the least side.

14. If $\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$, find $a:b:c$.

15. If the angles adjacent to the base of a triangle are $22\frac{1}{2}°$ and $112\frac{1}{2}°$, show that the altitude is half the base.

16. If the sides of a triangle are 4, 5, 6, show that the greatest angle is double the least.

ANSWERS

1. 35° 5′ 49″. **2.** 102° 1′ 28″. **3.** 58° 59′ 33″.
4. 104° 30′ ; 46° 36′ ; 28° 54′. **5,** (i) 86° 59′ 40·9″.
(ii) 78° 27′ 46·86″. **6.** (i) 48° 11′ 23″ ; 58° 24′ 43″ ; 73° 23′ 54″.
(ii) 132° 34′ 24″. **7.** $A=120°$, $B=45°$, $C=15°$.
8. $A=45°$, $B=30°$, $C=105°$. **9.** $A=60°$, $B=38° 11'$, $C=81° 49'$.
10. $A=105°$, $B=45°$, $C=30°$. **11.** $(\sqrt{3}+1):\sqrt{6}:(\sqrt{3}-1)$.
13. $(\sqrt{5}+1):(\sqrt{5}-1)$. **14.** 3 : 4 : 5.

15·4. দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূত কোণ নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান : (Two sides and the included angle given).

মনে করি যে, ABC ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত (included) কোণের মান, b, c এবং A ; জ্যামিতিক প্রণালীতে এই ত্রিভুজ অতি সহজেই অঙ্কিত করা যায় এবং একটিমাত্র ত্রিভুজই পাওয়া যায়। অপর দুইটি কোণ নির্ণয় করিতে হইলে আমরা নিম্নোক্ত সূত্র দুইটির সাহায্য লই ; যথা—

$$B+C=180°-A \quad \text{অর্থাৎ,} \quad \tfrac{1}{2}(B+C)=90°-\tfrac{1}{2}A$$

এবং $$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$$

অর্থাৎ, $$L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\left(\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\right)$$
$$=\log\frac{b-c}{b+c}+L\cot\frac{A}{2}.$$

এক্ষণে b, c এবং A প্রদত্ত রাশি বলিয়া দক্ষিণ পক্ষের মান নির্ণয় করা যায় এবং ইহারই সাহায্যে পাওয়া যায় $L\tan\frac{1}{2}(B-C)$ অর্থাৎ $\frac{1}{2}(B-C)$-এর মান।

অতএব, $\frac{1}{2}(B+C)$ এবং $\frac{1}{2}(B-C)$ উভয়েই নির্ণীত হওয়ার দরুণ আমরা যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার সাহায্যে যথাক্রমে B এবং C-এর মান নির্ণয় করিতে সক্ষম হইব।

15·2 অনুচ্ছেদে ট্যানজেণ্ট সূত্রের প্রয়োগের কারণ পূর্বেই বর্ণিত হইয়াছে। B এবং C নির্দিষ্ট হইলে আমরা

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$-এর সাহায্যে c-এর মান নির্ণয় করিতে পারি।

Ex. *In a triangle,* $b=2{\cdot}25$, $c=1{\cdot}75$, $A=54°$, *find B and C, having given*

$$\log 2=\cdot301030,\quad L\tan 63°=10{\cdot}292834$$
$$L\tan 13°\,47'=9{\cdot}389724,\quad L\tan 13°\,48'=9{\cdot}390270$$

[C. U. 1931]

এক্ষেত্রে, $\frac{1}{2}(B+C)=90°-\frac{1}{2}A=90°-27°=63°$ ··· (i)

পুনরায়, $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{\cdot5}{4}\cot 27°=\frac{1}{8}\tan 63°.$

$$\therefore\ L\tan\tfrac{1}{2}(B-C)=L\tan 63°-3\log 2$$
$$=10{\cdot}292834-\cdot903090=9{\cdot}389744.$$

এক্ষণে, $L\tan 13°\,47'=9{\cdot}389724$, এবং $L\tan 13°\,48'=9{\cdot}390270.$
অতএব, $\frac{1}{2}(B-C)=13°\,47'\,x''$ এবং x''-এর জন্য পার্থক্য $=\cdot000020.$
$1'$ অর্থাৎ $60''$-এর জন্য পার্থক্য $=\cdot000546.$

$\therefore\quad \frac{x}{60}=\frac{20}{546}$ অথবা, $x=\frac{20\times 60}{546}=2{\cdot}2$ (প্রায়)।

অতএব, $\frac{1}{2}(B-C)=13°\,47'\,2''{\cdot}2$ (প্রায়) ··· (ii)

(i) এবং (ii)-এর সাহায্যে $B=76°\,47'\,2''{\cdot}2$ এবং $C=49°\,12'\,57''{\cdot}8.$

15·5. দুইটি কোণ এবং একটি বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান : (Two angles and a side given).

মনে করি যে, ত্রিভুজের একটি বাহু a এবং দুইটি কোণ দেওয়া আছে। তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180° বলিয়া তৃতীয় কোণটিও নির্ণয় করা যায়। অপর দুইটি বাহু b এবং c নির্ণয় করিতে হইলে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

এই সূত্রটি ব্যবহার করিতে হইবে।

Ex. *In a triangle ABC,* $A=38°\ 20'$, $B=45°$ এবং $b=64$ *ft. Find c, having given* $\log 2=·30103$, $L\sin 83°\ 20'=9·99705$ *and* $\log ·089896=\bar{2}·95374$.

এক্ষেত্রে, $C=180°-(A+B)=180°-83°\ 20'$

এক্ষণে, $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

অথবা, $\dfrac{c}{\sin(180°-83°\ 20')}=\dfrac{64}{\sin 45°}=\dfrac{64}{1/\sqrt{2}}=64\sqrt{2}=2^{\frac{13}{2}}$

$\therefore\quad c=2^{\frac{13}{2}}\sin 83°\ 20'$

$\therefore\quad \log c=\frac{13}{2}\log 2+L\sin 83°\ 20'-10$

$=\frac{13}{2}(·30103)+9·99705-10=1·95374.$

অতএব, $\log c$-এর অংশক $\log ·089896$-এর অংশকের সমান, কিন্তু ইহার পূর্ণক 1 ; অতএব, $c=89·896$ ফুট।

Examples XV(b)

1. Two sides of a triangle are 3 and 5 feet and the included angle is 120° ; find the other angles, having given

$\log 4·8=·6812412$

$L\tan 8°\ 12'=9·1586706$, diff. for $60''=8940$. [C. U. 1949]

2. If $b=1300$, $c=1400$ and $A=60°$, find B and C.

Given $\log 3=·4771213$,

$L\tan 3°\ 40'=8·8067422$, diff. for $10''=3306$.

3. If $a=21$, $b=11$, $C=34^\circ\ 42'\ 30''$, find A and B.
Given log $2 = \cdot 30103$,
and L tan $72^\circ\ 38'\ 45'' = 10\cdot 50515$.

4. If the sides a and b are in the ratio 7 : 3 and the included angle C is 60°, find A and B, given

log $2 = \cdot 3010300$, log $3 = \cdot 4771213$

L tan $34^\circ\ 42' = 9\cdot 8403776$, diff. for $1' = 2699$.

5. Two sides of a plane triangle are 14 and 11 and the included angle is 60°. Find the remaining angles, having given L tan $11^\circ\ 44' = 9\cdot 3174299$, L tan $11^\circ\ 45' = 9\cdot 3180640$.

[C. U. 1922]

6. (i) Two sides of a triangle are 80 and 100 ft. and the included angle is 60°. Find the other angles. [C. U. 1946]

(ii) If $a=5$, $b=3$, $C=70^\circ\ 30'$, find the remaining angles.

(iii) If $a=39\cdot 9$, $b=43\cdot 2$, $C=38^\circ\ 14'$, solve the triangle.

[*Use Mathematical Tables*]

7. (i) In a plane triangle, $b=540$, $c=420$ and $A=52^\circ\ 6'$; find B and C having given

L tan $26^\circ\ 3' = 9\cdot 6891430$,

L tan $14^\circ\ 20' = 9\cdot 4074189$, L tan $14^\circ\ 21' = 9\cdot 4079453$.

[C. U. 1934]

(ii) Given $a=70$, $b=35$, $C=36^\circ 52' 12''$, log $3 = 0\cdot 4771213$, L cot $18^\circ 26' 6'' = 10\cdot 4771213$. Calculate the other two angles A and B. [C. U. 1935, '37]

8. If $a=2\sqrt{6}$, $c=6-2\sqrt{3}$, $B=75^\circ$, solve the triangle.

9. Two sides of a triangle are $\sqrt{3}+1$ and $\sqrt{3}-1$ and the included angle is 60°; solve the triangle.

10. (i) If $a=2$, $b=1+\sqrt{3}$, $C=60^\circ$, solve the triangle.

(ii) If $a=2$, $b=4$, $C=60^\circ$, find A and B.

11. If $a=19$, $B=52^\circ\ 28'$ and $C=93^\circ\ 40'$, find b, having given
log $27038 = 4\cdot 4319746$; log $19 = 1\cdot 2787536$;
log $27037 = 4\cdot 4319585$;

L sin $52^\circ\ 28' = 9\cdot 8992727$, L sin $33^\circ\ 52' = 9\cdot 7460595$.

12. If $B = 45°$, $C = 10°$ and $a = 200$ ft., find b, having given
$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 55° = 9 \cdot 9133645$
$\log 1726 \cdot 4 = 3 \cdot 2371414$, $\log 1726 \cdot 5 = 3 \cdot 2371666$.
[C. U. 1947]

13. If $A = 41° \ 13' \ 22''$, $B = 71° \ 19' \ 5''$, and $a = 55$, find b, given
$\log 55 = 1 \cdot 7403627$, $\log 79063 = 4 \cdot 8979775$
$L \sin 41° \ 13' \ 22'' = 9 \cdot 8188779$
$L \sin 71° \ 19' \ 5'' = 9 \cdot 9764927$.

14. (i) If $B = 70° \ 30'$, $C = 78° \ 10'$, $a = 102$, solve the triangle.

(ii) If $a = 39$, $A = 81° \ 35'$, $B = 27° \ 55'$, solve the triangle.

(iii) If $A = 37° \ 15'$, $B = 72° \ 5'$, $a = 75 \cdot 2$, find b and c.

[*Mathematical tables should be used*]

15. If $A = 75°$, $B = 30°$, $b = \sqrt{8}$, solve the triangle.

16. If $A = 30°$, $B = 45°$, $b = 2$, solve the triangle.

17. In a triangle in which each base angle is double of the third angle, the base is 2 ; solve the triangle.

18. Given $a = \sqrt{57}$, $A = 60°$, $\triangle = 2\sqrt{3}$, find b and c.

ANSWERS

1. $B = 38° \ 12' \ 48''$, $C = 21° \ 47' \ 12''$.

2. $B = 56° \ 19' \ 46 \cdot 3''$, $C = 63° \ 40' \ 13 \cdot 7''$.

3. $A = 117° \ 38' \ 45''$, $B = 27° \ 38' \ 45''$. **4.** $A = 94° \ 42' \ 54''$, $B = 25° \ 17' \ 6''$.

5. $B = 71° \ 44' \ 29 \cdot 5''$, $C = 48° \ 15' \ 30 \cdot 5''$. **6.** (i) $70° \ 53' \ 36''$; $49° \ 6' \ 14''$.
(ii) $74° \ 13' \ 50''$, $35° \ 16' \ 10''$. (iii) $A = 64° \ 21'$, $B = 77° \ 25'$, $c = 27 \cdot 39$.

7. (i) $B = 78° \ 17' \ 39 \cdot 6''$, $C = 49° \ 36' \ 20 \cdot 4''$. (ii) $116° \ 33' \ 54''$; $26° \ 33' \ 54''$.

8. $A = B = 75°$, $C = 30°$, $b = 2\sqrt{6}$. **9.** $\sqrt{6}$, $15°$, $105°$.

10. (i) $A = 45°$, $B = 75°$, $c = \sqrt{6}$. (ii) $A = 30°$, $B = 90°$. **11.** $27 \cdot 0375$.

12. $172 \cdot 6436$ ft. **13.** $79 \cdot 063$. **14.** (i) $A = 31° \ 20'$, $b = 185$, $c = 192$.
(ii) $b = 18 \cdot 46$, $c = 37 \cdot 16$, $C = 70° \ 30'$. (iii) $b = 118 \cdot 9$, $c = 117 \cdot 2$.

15. $C = 75°$, $a = c = 2\sqrt{3} + 2$. **16.** $C = 105°$, $a = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3} + 1$.

17. $72°$, $72°$, $36°$; each side $= \sqrt{5} + 1$. **18.** 8, 1.

15·6. দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ নির্দিষ্ট থাকিলে ত্রিভুজের সমাধান (Two sides and an opposite angle given) :

মনে করি, ABC ত্রিভুজের b এবং c—এই দুইটি বাহু এবং b বাহুর বিপরীত কোণ B দেওয়া আছে।

এক্ষেত্রে $\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$ বা $\sin C=\frac{c \sin B}{b}$.

এই সূত্রের সাহায্যে C-কোণের মান নির্ণয় করা যায়।

এক্ষণে তিনটি বিভিন্ন ক্ষেত্র উপস্থিত হইতে পারে। যথা :

(i) $c \sin B > b$: এক্ষেত্রে $\sin C$ এক অপেক্ষা বৃহত্তর, অতএব, C নির্ণয় করা যায় না ; অর্থাৎ এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজ অঙ্কিত করা সম্ভব নয়।

(ii) $c \sin B=b$: এক্ষেত্রে $\sin C=1$; অতএব, $C=90°$ এবং $A=90°-B$; সুতরাং এক্ষেত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যাহার C কোণ সমকোণ ; এবং, $c^2=a^2+b^2$ বা $a=\sqrt{c^2-b^2}$—এই সূত্রের সাহায্যে a বাহু নির্ণয় করা যায়।

(iii) $c \sin B < b$: এক্ষেত্রে sin C এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অতএব, C-এর মান নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সম্পূরক কোণের সাইন সমান হয় বলিয়া, ত্রিভুজের এই কোণটি সূক্ষ্ম বা স্থূলকোণ দুইই হইতে পারে। অতএব, C-এর দুইটি মান পাওয়া যায় যাহারা পরস্পর সম্পূরক। এইখানেও তিনটি বিভিন্ন ক্ষেত্র উপস্থিত হইতে পারে।

ক্ষেত্র A : দুইটি বাহুর মধ্যে $b > c$ হইলে, $B > C$; কাজেই C স্থূলকোণ হইতে পারে না, কারণ, সেক্ষেত্রে B-ও স্থূলকোণ হইবে, অর্থাৎ B ও C কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। অতএব, C কেবলমাত্র সূক্ষ্মকোণই হইতে পারে। এক্ষণে, B এবং C উভয়েই নির্দ্দিষ্ট হইলে $A+B+C=180°$ বলিয়া A-ও নির্ণীত হইবে। অতঃপর,

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ এই সূত্রের সাহায্যে a-বাহু নির্ণীত হইবে। অতএব, ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

ক্ষেত্র B : $b=c$ হইলে $B=C$, এবং এক্ষেত্রেও C স্থূলকোণ হইতে পারে না ; কাজেই, C-কে সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করিলে ক্ষেত্র A-এর অনুরূপ এক্ষেত্রেও ত্রিভুজটির কেবলমাত্র একটি সমাধান সম্ভব।

ক্ষেত্র C : $b < c$ হইলে $B < C$; অতএব, C সূক্ষ্মকোণ বা স্থূলকোণ উভয়ই হইতে পারে, এবং এক্ষেত্রে সম্পূরক দুইটি কোণই গ্রাহ্য করিতে হইবে। সুতরাং b, c এবং B নির্দিষ্ট থাকিলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব হইবে। C-এর প্রতিটি মানের জন্য A ভিন্ন হইবে এবং ইহার মান নির্ণীত হইবে $A+B+C=180°$—এই সূত্রটির সাহায্যে। অতঃপর a-বাহু নির্ণয় করিতে

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ এই সূত্রের সাহায্য লইতে হইবে।

ত্রিভুজের সমাধানের এই ক্ষেত্রকে (যেক্ষেত্রে b, c এবং B নির্দিষ্ট এবং $b > c \sin B$, কিন্তু $< c$) বলা হয় **দ্ব্যর্থক** (ambiguous) ক্ষেত্র।

উপরোক্ত ফলাফলগুলি সংক্ষেপে নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যায়ঃ একটি ত্রিভুজে b, c, B নির্দিষ্ট এবং

(i) $b < c \sin B$ হইলে, কোন ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(ii) $b = c \sin B$ হইলে, সমাধান হইবে একটি নির্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

(iii) $b > c$ (কাজেই $> c \sin B$) হইলে, C সূক্ষ্মকোণবিশিষ্ট একটি-মাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

(iv) $b = c$ (কাজেই $> c \sin B$) হইলে, একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় যাহার C কোণ হইবে সূক্ষ্মকোণ।

(v) $b > c \sin B$, কিন্তু $< c$ হইলে, দুইটি সমাধান সম্ভব ও এই ক্ষেত্রকে বলা হয় **দ্ব্যর্থক** ক্ষেত্র।

15·7. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের জ্যামিতিক আলোচনা (Geometrical treatment of ambiguous case) :

দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ, যথা—b, c, B দেওয়া থাকিলে জ্যামিতিক প্রণালীতে ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া উপরোক্ত বিষয়গুলি আরও পরিষ্কার করা যায়।

$\angle B$-এর সমান করিয়া $\angle ABX$ অঙ্কিত করিয়া উহার একটি বাহু হইতে BA অংশ c-এর সমান করিয়া কাটিয়া লওয়া হইল। AN সরলরেখা AX-এর উপর লম্ব হইলে, $\frac{AN}{AB}=\sin B$; অতএব, $AN = AB \sin B = c \sin B$. এখন A কেন্দ্র এবং b ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল।

প্রথম ক্ষেত্র : $b < c \sin B$ অর্থাৎ $<AN$ হইলে, বৃত্তটি BX বাহুর সহিত একেবারেই মিলিত হইবে না অর্থাৎ কোন ত্রিভুজই অঙ্কিত করা সম্ভব হইবে না। (চিত্র (i) দ্রষ্টব্য)

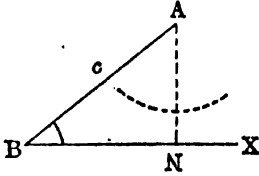



Fig. (i)

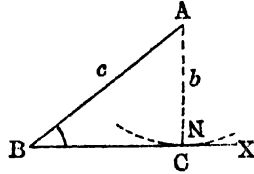



Fig. (ii)

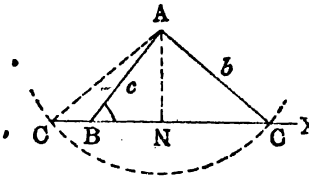



Fig. (iii)

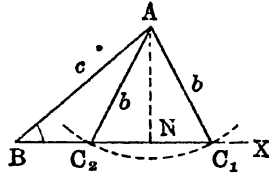



Fig. (iv)

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $b = c \sin B$ অর্থাৎ $=AN$ হইলে, বৃত্তটি BX-কে N-এর সমবিন্দু C-তে স্পর্শ করিবে ; (চিত্র (ii) দ্রষ্টব্য)। অতএব, একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে যাহার বাহুদ্বয় AB ও AC এবং কোণ B যথাক্রমে নির্দিষ্ট বাহু b, c এবং কোণ B-এর সমান হইবে। অতএব, ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

তৃতীয় ক্ষেত্র : $b > c > AB$ হইলে, বৃত্তটি BX-কে B-বিন্দুর উভয়দিকে অবস্থিত C এবং C′—এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে (চিত্র (iii) দ্রষ্টব্য)। ABC′ ত্রিভুজের AB ও AC′ বাহুদ্বয় যথাক্রমে b এবং c-এর সমান হইলেও $\angle ABC'$ নির্দিষ্ট কোণ B-এর সমান না হইয়া উহার সম্পূরক হইবে। অতএব, $\triangle ABC'$ নির্ণেয় সমাধান নয়। এক্ষেত্রে মাত্র একটি ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব।

চতুর্থ ক্ষেত্র : $b = c$ অর্থাৎ $=AB$ হইলে, একটিমাত্র ত্রিভুজ ABC অঙ্কন করা যায়, কারণ পূর্বোক্ত ক্ষেত্রের C′, B-এর সহিত অভিন্ন হইবে।

পঞ্চম ক্ষেত্র: $b > c \sin B$ অর্থাৎ $>$ AN, কিন্তু $< c$ (বা AB) হইলে, বৃত্তটি BX-কে B বিন্দুর একই দিকে C_1 এবং C_2 এই দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে [চিত্র (iv) দ্রষ্টব্য]। ABC_1 এবং ABC_2—এই দুইটি ত্রিভুজেরই তিনটি অংশ নির্দিষ্ট তিনটি অংশের সমান এবং এই দুইটিই সম্ভাব্য সমাধান। অতএব ইহাই দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র।

15·8. দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের বীজীয় আলোচনা (Algebraic Discussion):

b, c এবং B দেওয়া থাকিলে, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ এই সমীকরণের সাহায্যে আমরা প্রথমে C নির্ণয় না করিয়া a-র মান নির্ণয় করিতে পারি। এই সমীকরণকে a-র দ্বিঘাত সমীকরণ কল্পনা করিলে

$$a^2 - 2ca \cos B + c^2 - b^2 = 0,$$

এবং ইহা সমাধান করিলে

$$a = c \cos B \pm \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B}.$$

(i) $b < c \sin B$ হইলে $b^2 - c^2 \sin^2 B$ ঋণাত্মক হইবে ; অর্থাৎ a-র দুইটি মানই হইবে কাল্পনিক। (অতএব, কোন প্রকারের সমাধান অসম্ভব)।

(ii) $b = c \sin B$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B = 0$; অতএব, a-র দুইটি মান বাস্তব এবং পরস্পর সমান।

(এক্ষেত্রে একটিমাত্র সমাধান এবং ত্রিভুজের C কোণ সমকোণ, যেহেতু $b = c \sin B$).

(iii) $b > c \sin B$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B$ ধনাত্মক হইবে অর্থাৎ 'a'-র দুইটি মান হইবে বাস্তব এবং পৃথক্, কিন্তু উভয় মান সর্বত্র গ্রাহ্য হইবে না।

(1) $b > c$ অর্থাৎ $b^2 > c^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B > c^2 \cos^2 B$ অর্থাৎ $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B} > c \cos B$ হইবে, এবং a-র একটি মান ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে। (অতএব, একটিমাত্র সমাধান।)

(2) $b = c$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B = c^2 - c^2 \sin^2 B = c^2 \cos^2 B$; অতএব, a-র একটি মান শূন্য। (অতএব, একটিমাত্র সমাধান।)

(3) $b < c$ অর্থাৎ $b^2 < c^2(\sin^2 B + \cos^2 B)$ হইলে, $b^2 - c^2 \sin^2 B < c^2 \cos^2 B$; অর্থাৎ $\sqrt{b^2 - c^2 \sin^2 B} < c \cos B$; সুতরাং, a-র উভয় মানই বাস্তব এবং ধনাত্মক। (অতএব, এক্ষেত্রে দুইটি সমাধান হইবে।)

ইহা দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রের বীজীয় আলোচনা (algebraic discussion)। এই প্রণালীর সাহায্যে একটি প্রশ্নের সমাধান দেওয়া হইল :

Ex. 1. *In a triangle, $b=15$ ft., $c=10$ ft., $B=60^\circ$. Find a and A having given sin $84^\circ 44' = \cdot 99578$.*

আমরা জানি, $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$.

অর্থাৎ এক্ষেত্রে, $225=100+a^2-20a\cos 60^\circ$

বা, $a^2-10a-125=0$. $\therefore\ a=5\pm 5\sqrt{6}$.

a-র ঋণাত্মক মান অসম্ভব বলিয়া অগ্রাহ্য করিলে, a-র একমাত্র মান $5(\sqrt{6}+1)$ ফুট। অতএব, একটিমাত্র সমাধান সম্ভব।

পুনরায়, $\sin A=\dfrac{a}{b}\sin B=\dfrac{5(\sqrt{6}+1)}{15}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$

$$=\frac{3\times 1\cdot 41421\cdots+1\cdot 73205\cdots}{6}=\cdot 99578\cdots$$

$\therefore\ A=84^\circ\ 44'$.

Ex. 2. *In a triangle, $a=73\cdot 4$, $b=64\cdot 9$ and $B=48^\circ\ 13'\ 25''$; find A, having given*

log $734=2\cdot 8656961$, *log* $649=2\cdot 8122447$
L sin $48^\circ\ 13'\ 25''=9\cdot 8725936$.
L sin $57^\circ\ 30'=9\cdot 9260292$ (*diff. for* $1'=804$)

Is the case ambiguous ?

এক্ষেত্রে $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}=\dfrac{734}{649}\sin 48^\circ\ 13'\ 25''$.

$$\therefore\ L\sin A=\log 734-\log 649+L\sin 48^\circ\ 13'\ 25''$$
$$=2\cdot 8656961-2\cdot 8122447+9\cdot 8725936$$
$$=9\cdot 9260450.$$

L sin $57^\circ\ 30'$ হইতে ইহার অন্তর 158 (অর্থাৎ $\cdot 0000158$) এবং $1'$ অর্থাৎ $60''$-র জন্য অন্তর 804 (অর্থাৎ $\cdot 0000804$).

অতএব $A=57^\circ 30' x''$ এবং $\dfrac{x}{60}=\dfrac{158}{804}$ অর্থাৎ $x=11\cdot 8$ (প্রায়)

$\therefore\ A=57^\circ\ 30'\ 11''\cdot 8$ বা ইহার সম্পূরক কোণ $122^\circ\ 29'\ 48''\cdot 2$, কারণ উভয়ের সাইন এবং সেইহেতু L sine সমান।

এক্ষণে, এইক্ষেত্রে $a>b$, অর্থাৎ $A>B$ বলিয়া উভয়ই A-র সম্ভাব্য মান। অতএব, ইহা দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র এবং ত্রিভুজের দুইটি সমাধান হইবে।

Examples XV(c)

1. Given (i) $A=30^\circ$, $a=6$, $b=4$. (ii) $A=60^\circ$, $a=7$, $b=8$.

(iii) $A=45^\circ$, $a=2$, $b=8$. (iv) $A=30^\circ$, $a=3$, $b=6$.

Find in which case the solution is ambiguous, in which case there is one solution, and in which case there is no solution.

2. (i) If $b=2$, $c=\sqrt{3}+1$ and $B=45^\circ$, solve the triangle.

(ii) If $a=3$, $b=3\sqrt{3}$, $A=30^\circ$, find B.

3. If $a=2$, $b=\sqrt{6}$, $B=60^\circ$, solve the triangle.

4. If $a=2$, $b=5$, $A=30^\circ$, solve the triangle.

5. If b, c, B are given and if $b < c$, show that

$$(a_1-a_2)^2+(a_1+a_2)^2\tan^2 B=4b^2$$

a_1 and a_2 being the two possible values of a.

6. In the ambiguous case, given a, b and A, prove that the difference between the two values of c is

$$2\sqrt{a^2-b^2\sin^2 A}.$$

7. If a, b, A are given, and if c_1, c_2 are the values of the third side in the ambiguous case, prove that if $c_1 > c_2$,

(i) $c_1-c_2=2a\cos B_1$. [B. H. U. I. 1928]

(ii) $c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos 2A=4a^2\cos^2 A$.

[B. H. U. I. 1935 ; Pat. I. 1936]

(iii) $\cos\frac{C_1-C_2}{2}=\frac{b\sin A}{a}$. [A. I. 1941]

8. If $b=16$, $c=25$ and $B=33^\circ 15'$, find the other angles ; given

$L\sin 33^\circ 15'=9{\cdot}7390129$, $\log 2={\cdot}30103$,

$L\sin 58^\circ 57'=9{\cdot}9328376$, $L\sin 58^\circ 56'=9{\cdot}9327616$.

9. If $a=5$, $b=4$, $A=45^\circ$, find B and C ; given

$\log 2={\cdot}30103$, $L\sin 34^\circ 27'=9{\cdot}75257$.

10. If $a=30$, $b=300$, find A in order that B may be a right angle, having given that

$L\sin 5^\circ 44'=8{\cdot}9995595$, diff. for $1'=12565$.

11. If $a=16$, $c=25$ and $C=60°$, find the other angles ; given $\log 2 = \cdot 30103$. $\log 3 = \cdot 4771213$.

L sin 33° 39′ = 9·7436024, diff. for 1′ = 1897.

12. If $b=165$, $c=258$, and $B=35° \, 10'$, find the angles A and C ;

given $\log 1\cdot 65 = \cdot 21749$, $\log 2\cdot 58 = \cdot 41162$

L sin 35° 10′ = 9·76039, L sin 64° 14′ = 9·95452.

13. If $2b=3a$ and $\tan^2 A = \frac{3}{5}$, prove that there are two values of the third side, one of which is double the other.

14. If A_1, B_1 and A_2, B_2 are the angles of the two triangles in the ambiguous case where b, c, C are given,

$$\text{then } \frac{\sin A_1}{\sin B_1} + \frac{\sin A_2}{\sin B_2} = 2 \cos C.$$

15. Show that in the case that admits of two solutions the two values of C satisfy the equation

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}.$$ [B. H. U. I. 1942]

16. If $\log b + 10 = \log c + \text{L} \sin B$, can the triangle be ambiguous ?

ANSWERS

1. (i) One solution. (ii) Ambiguous ; two solutions.

(iii) No solution. (iv) One solution (right-angled triangle).

2. (i) $C=75°$, $A=60°$, $a=\sqrt{6}$ or, $C=105°$, $A=30°$, $a=\sqrt{2}$ (ii) 60°, or, 120°.

3. $A=45°$, $B=75°$, $c=\sqrt{3}+1$. (no ambiguity). **4.** Impossible.

8. $C=58° \, 56' \, 56\cdot 3''$, $A=87° \, 48' \, 3\cdot 7''$ or, $C=121° \, 3' \, 3\cdot 7''$, $A=25° \, 41' \, 56\cdot 3''$

9. $B=34° \, 27'$, $C=100° \, 33'$.

10. $A=5° \, 44' \, 21''$. **11.** $A=33° \, 39' \, 34''$, $B=86° \, 20' \, 26''$.

12. $A=80° \, 36'$, $C=64° \, 14'$; or, $A=29° \, 4'$, $C=115° \, 46'$. **16.** No.

ষোড়শ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব বিষয়ক সরল প্রশ্নাবলী

(Simple problems on heights and distances)

16·1. ইতিপূর্বে পঞ্চম অধ্যায়ে উচ্চতা ও দূরত্ব সম্বন্ধীয় সহজ প্রশ্নমালায় ত্রিকোণমিতির সহজ ব্যবহারিক প্রয়োগ-সম্পর্কীয় আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অনুচ্ছেদে যে উদাহরণগুলি দেওয়া হইয়াছে, তাহা আরও ব্যাপক এবং ইহাদের সমাধান করিবার জন্য ত্রিভুজের কোণ এবং বাহু সম্পর্কীয় সাধারণ সূত্রের প্রয়োগ এবং জ্যামিতিতে অধিকতর দক্ষতার প্রয়োজন হইবে।

16·2. অনুভূমিক সমতলে দণ্ডায়মান কোন দুর্গম বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয়ঃ

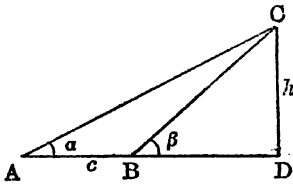
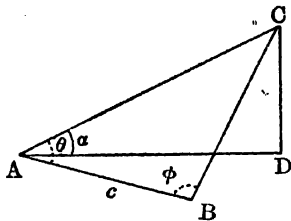



Fig. (i) Fig. (ii)

মনে করি, অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত বস্তু CD-কে A হইতে দেখা যাইতেছে। C বিন্দুর উন্নতি কোণ α, CD-র নির্ণেয় উচ্চতা h, এবং A হইতে D-র দূরত্ব d, অর্থাৎ $AD=d$.

ক্ষেত্র I. সম্ভব হইলে, AD-র দিকে $AB(=c)$ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল ; মনে করি, B হইতে C-র উন্নতি-কোণ β। এখন চিত্র (i) হইতে,

$$c=AD-BD=h\cot\alpha-h\cot\beta=h\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\frac{h\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

$$\therefore\quad h=c\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha).$$

এবং $\quad d=AD=h\cot\alpha=c\cos\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha).$

দ্রষ্টব্য। উপরের প্রত্যেকটি রাশিমালাই লগারিদ্‌ম্‌-এর সাহায্যে নির্ণয় করার পক্ষে বিশেষ উপযোগী।

ক্ষেত্র II. যদি AB-কে ঠিক AD-এর দিকে পরিমাপ করা সুবিধাজনক না হয়, তাহা হইলে আমরা নিম্নলিখিতভাবে অগ্রসর হইতে পারি :

A হইতে যে-কোনও সুবিধাজনক দিকে $AB = c$ কাটিয়া লওয়া হইল। মনে করি, A হইতে C-র উন্নতি-কোণ α; A এবং B হইতে CAB এবং CBA কোণদ্বয় মাপিয়া লওয়া হইল। মনে করি, $\angle CAB = \theta$, $\angle CBA = \phi$.

এক্ষেত্রে চিত্র (ii) হইতে দেখা যায় যে, ABC ত্রিভুজে

$$\frac{AC}{\sin\phi} = \frac{AB}{\sin C} = \frac{c}{\sin(180^\circ - \theta - \phi)} = \frac{c}{\sin(\theta + \phi)}$$

$\therefore \quad AC = c \sin\phi \operatorname{cosec}(\theta + \phi).$

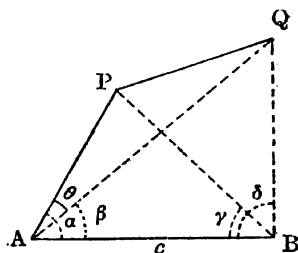
$\therefore \quad h = AC \sin\alpha = c \sin\alpha \sin\phi \operatorname{cosec}(\theta + \phi)$

এবং $\quad d = AD = AC \cos\alpha = c \cos\alpha \sin\phi \operatorname{cosec}(\theta + \phi).$

দ্রষ্টব্য। এক্ষেত্রেও নির্ণেয় রাশিগুলি লগারিদ্‌ম্‌-এর সাহায্য-গ্রহণের উপযোগী।

16·3. দুইটি দৃশ্যমান দুর্গম বস্তুর দূরত্ব নির্ণয় :

দুইটি বস্তু P এবং Q-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে। দুইটি সুবিধাজনক অবস্থান A এবং B লওয়া হইল; উহাদের দূরত্ব কল্পনা করা হইল c-এর সমান। A বিন্দুতে উৎপন্ন তিনটি কোণ PAQ, PAB, QAB-এর মান নির্ণয় করা হইল এবং মনে করি উহাদের পরিমাপ θ, α এবং β। [A, B, P, Q বিন্দু চতুষ্টয় একই সমতলে অবস্থিত হইলে PAB কোণের পরিমাপ করা নিষ্প্রয়োজন, কারণ, $\angle PAB = \angle PAQ + \angle QAB$.]

মনে করি, B বিন্দুতে উৎপন্ন PBA, QBA কোণদ্বয়ের পরিমাপ যথাক্রমে γ এবং δ.

$\triangle PAB$ হইতে, $\dfrac{PA}{\sin\gamma} = \dfrac{c}{\sin(180^\circ - \alpha - \gamma)} = \dfrac{c}{\sin(\alpha + \gamma)}.$

$\therefore \quad PA = c \sin\gamma \operatorname{cosec}(\alpha + \gamma).$

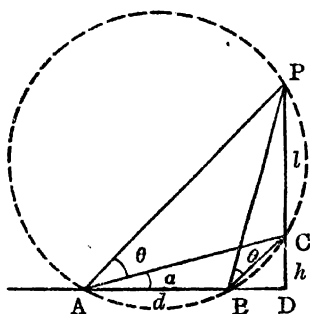
অনুরূপভাবে, $\triangle QAB$ হইতে, $QA = c \sin\delta \operatorname{cosec}(\beta + \delta).$

অবশেষে, $\triangle PAQ$ হইতে,

$$PQ^2 = PA^2 + QA^2 - 2PA.QA.\cos\theta.$$

এভাবে PQ নির্ণীত হইল।

16·4. নিম্নে উচ্চতা ও দূরত্ব সম্পর্কীয় কঠিনতর কতিপয় উদাহরণের সমাধান দেওয়া হইল।

Ex. 1. *A flagstaff is fixed on the top of a tower standing on a horizontal plane. An observer walking directly towards the foot of the tower, observes the angle subtended by the flagstaff from two positions on his path to be the same, namely θ. The distance between these two positions is d, and the angle subtended by the tower at his first position is α. Find the height of the tower and the length of the flagstaff.*

মনে করি, CD প্রদত্ত স্তম্ভ এবং PC প্রদত্ত দণ্ড; ইহাদের উচ্চতা যথাক্রমে h এবং l; A এবং B পর্যবেক্ষকের দুইটি অবস্থান। যেহেতু, $\angle PAC = \angle PBC = \theta$, অতএব, P, A, B, C সমবৃত্তীয় হইবে। সুতরাং, $\angle CBD = \angle APC = 90^\circ - \angle PAD = 90^\circ - (\theta + \alpha)$.

এক্ষণে, $d = AD - BD = h\cot\alpha - h\cot(CBD)$

$$= h\{\cot\alpha - \tan(\theta+\alpha)\}.$$

$$= h\left\{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)}\right\} = h\frac{\cos(\theta+2\alpha)}{\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}.$$

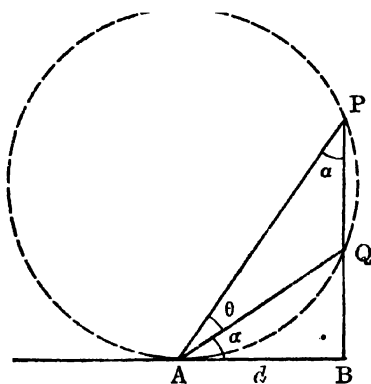
$$\therefore\quad h = d\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)\sec(\theta+2\alpha).$$

পুনরায়, $\triangle APC$ হইতে,

$$\frac{l}{\sin\theta} = \frac{AC}{\sin APC} = \frac{h}{\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)} = \frac{d}{\cos(\theta+2\alpha)}.$$

$$\therefore\quad l = d\sin\theta\sec(\theta+2\alpha).$$

Ex. 2. *A man walking towards a building, on which a flagstaff is fixed, observes the angle subtended by the flagstaff to be greatest,*

when he is at a distance d from the building. If θ be the observed greatest angle, find the length of the flagstaff, and the height of the building.

QB প্রদত্ত গৃহ এবং PQ প্রদত্ত দণ্ড হইলে ইহা সহজেই প্রমাণ করা যায় যে, P এবং Q-এর মধ্য দিয়া এবং পর্যবেক্ষকের পথরেখাকে স্পর্শ করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত পথরেখাকে A বিন্দুতে স্পর্শ করিলে, PQ দণ্ড A বিন্দুতেই বৃহত্তম কোণ উৎপন্ন করিবে।

অতএব, $\angle QAB = \angle APQ = \alpha$ ধরা হইলে,

$\angle PAB + \angle APB = 90°$, বা $\theta + 2\alpha = 90°$ ··· (i)

এক্ষণে, $PQ = PB - QB = d \tan(\theta + \alpha) - d \tan \alpha$

$$= d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right\} = d\,\frac{\sin \theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos \alpha} = \frac{2d \sin \theta}{\cos(\theta+2\alpha) + \cos \theta}$$

$= 2d \tan \theta$ [(i)-এর সাহায্যে]

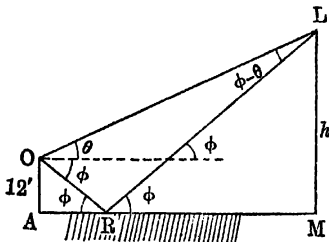
আবার, $QB = d \tan \alpha = d \tan(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\theta)$.

Ex. 3. *The angle of elevation of a light at the top of a distant tower from a point 12 ft. above a lake is 24°55′, and the angle of depression of its reflection in the lake is 35°5′. Find the height of the tower correct to two decimal places, having given*

$\log 2 = \cdot30103$ $\log 3 = \cdot47712$

$\log 588 = 2\cdot76938$ $\log 589 = 2\cdot77012$

$L \sin 10°10' = 9\cdot24677$.

মনে করি, LM স্তম্ভের উপর L নির্দিষ্ট আলোকবর্তিকা, L হইতে একটি রশ্মি LRO হ্রদের R বিন্দুতে প্রতিফলিত হইয়া O বিন্দুতে অবস্থিত পর্যবেক্ষকের চক্ষে পড়িতেছে ; অতএব, পর্যবেক্ষক OR-এর দিকে প্রতিবিম্ব দেখিতে পাইবেন। সুতরাং, প্রতিফলনের নিয়মানুযায়ী, $\angle ORA = \angle LRM = \phi$, ধরা হইল। ইহাই প্রতিবিম্বের অবনতি-কোণ $35°5'$-এর সমান।

O বিন্দু হইতে L-এর উন্নতি-কোণ θ হইলে, $\theta = 24°25'$.

এক্ষণে, $\triangle ORL$ হইতে,

$$\frac{RL}{\sin(\theta+\phi)} = \frac{OR}{\sin(\phi-\theta)} = \frac{12}{\sin\phi\sin(\phi-\theta)} \text{ ফুট};$$

$$\therefore \quad h = LM = RL\sin\phi = 12\frac{\sin(\theta+\phi)}{\sin(\phi-\theta)} = 12\frac{\sin 60°}{\sin(10°10')}$$

$$= \frac{6\sqrt{3}}{\sin(10°10')} = \frac{2.3^{\frac{3}{2}}}{\sin(10°10')}.$$

$$\therefore \log h = \log(2.3^{\frac{3}{2}}) - \log\sin(10°10')$$
$$= \log 2 + \tfrac{3}{2}\log 3 + 10 - L\sin 10°10'$$
$$= \cdot 30103 + \tfrac{3}{2}(\cdot 47712) + 10 - 9\cdot 24677$$
$$= 1\cdot 76994.$$

প্রদত্ত রাশিমালা হইতে ইহা সিদ্ধান্ত করা যায় যে, $\log h$-এর মান $\log 58\cdot 8$ এবং $\log 58\cdot 9$-এর মধ্যবর্তী। $\therefore\ h = 58\cdot 8 + x$ ধরিলে,

$\cdot 1$-এর জন্য অন্তর $= 1\cdot 77012 - 1\cdot 76938 = \cdot 00074$,

এবং, x-এর জন্য অন্তর $= 1\cdot 76994 - 1\cdot 76938 = \cdot 00056$.

সুতরাং, সমানুপাতের নিয়মানুসারে,

$$\frac{x}{\cdot 1} = \frac{56}{74} = \cdot 75, \qquad \therefore\ x = \cdot 075 = \cdot 08 \text{ (আসন্ন মান)}$$

অতএব, $h = 58\cdot 88$ ফুট।

Examples XVI

1. The angle of elevation of the top of a palm tree standing on horizontal ground, observed from two points A and B, distant 40 and 30 feet from the foot, and in the same straight line with it are found to be complementary. Prove that the height of the tree is nearly 35 feet, and that the angle subtended at the top of the tree by the line AB is $\sin^{-1}\frac{1}{7}$.

2. The angles of elevation of an aeroplane from two places one mile apart and from a point half way between them are found to be 60°, 30° and 45° respectively. Show that the height of the aeroplane is $440\sqrt{6}$ yards.

3. A building with ten storeys, each of equal height x ft., stands on one side of a wide street, and from a point on the other side of the street directly opposite to the building, it is observed that the three uppermost storeys together and the two lowest storeys together subtend equal angles. Show that the width of the street is $x\sqrt{140}$ ft.

4. A two-storeyed building has the height of its lower storey 12 ft. and that of the upper storey 13 ft. Find at what distance the two storeys subtend equal angles to an observer's eye at a height 5 feet from the ground.

5. A vertical rod is erected in a horizontal rectangular field ABCD. The angular evevation of its top from A, B, C, D are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Show that

$$\cot^2\alpha - \cot^2\beta = \cot^2\delta - \cot^2\gamma.$$

6. The angles of elevation of a bird flying in a horizontal straight line, from a fixed point at four successive observations are $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, the observations being taken at equal intervals of time. Assuming that the speed of the bird is uniform, show that

$$\cot^2\alpha - \cot^2\delta = 3(\cot^2\beta - \cot^2\gamma).$$

7. A man on a hill observes that three towers on a horizontal plane subtend equal angles at his eye and that the angles of depression of their bases are α, β, γ. If a, b, c are the heights of the towers, prove that

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{a\sin\alpha} + \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{b\sin\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{c\sin\gamma} = 0.$$

8. A gun is fired from a fort F at a distance d from a station O, and from two stations A and B in a straight line with O and distant a and b respectively from O, the intervals between seeing the flash and hearing the report are t and t'. Show that the velocity of sound is

$$\sqrt{\frac{(d^2-ab)(a-b)}{at'^2-bt^2}}.$$

9. A person observes the elevation of the top of a telegraph post which is E. S. E. of him to be 45°, and at noon, the extremity of its shadow is to the N. E. of him ; if the length of the shadow be x, show that the height of the post is $x\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

10. A straight tree on the horizontal ground leans towards the North ; at two points due South and distant a, b respectively from the foot, the angular elevations of the top of the tree are α and β. Show that the inclination of the tree to the horizon is

$$\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{a\cot\beta-b\cot\alpha}\right).$$

11. An observer on a carriage moving with a speed V along a straight road observes in one position that two distant trees are in the same line with him which is inclined at an angle θ to the road. After a time t, he observes that the trees subtend their greatest angle ϕ ; show that the distance between the trees is

$$2\mathrm{V}t\sin\theta\sin\phi/(\cos\theta+\cos\phi).$$

12. A train travelling on one of two straight intersecting railways subtends at a certain station on the other line, angles α and β, when the front of the first carriage and the end of the last carriage reach the junction respectively. Show that the angle of intersection of the two lines is

$$\tan^{-1}\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha\sim\beta)}.$$

13. Two vessels are sailing in parallel directions, and at one instant the bearing of one from the other is α° N. of E. After an hour's sailing the bearing of the first from the second is β° N of E. and after another hour the bearing is γ° N. of E. Show that the vessels are sailing in a direction θ° N. of E., where

$$\sin(\alpha-\theta)\sin(\gamma-\beta)=\sin(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\theta).$$

14. A rod of given length can turn in a vertical plane passing through the sun, one end being fixed on the ground ; if the

longest shadow it can cast is $3\frac{1}{3}$ times the length of the rod, calculate the altitude of the sun, having given

$$\log 3 = \cdot 47712,\ L \cos 72^\circ\ 32'\ 30'' = 9\cdot 47712.$$

15. A ship sailing N. E. is, at a particular moment, in a line with two light-houses, one of which is situated 5 miles due N. of the other. In 3 minutes and also in 21 minutes the light-houses are found to subtend a right angle at the ship. Prove that the ship is sailing at the rate of 10 miles an hour, and that the light-houses subtend their greatest angle at the ship at the end of $3\sqrt{7}$ minutes.

16. A parachute was observed in the N. E. at the elevation 45°; ten minutes afterwards it was found to be due N. at an elevation $22\frac{1}{2}^\circ$. The parachute was descending at the rate of 6 miles per hour, and was all along drifted uniformly towards the west by the wind. Show that wind blows at the rate of 6 miles per hour.

17. A person wishing to determine the height of a distant temple observes the elevation of its top from a point on the horizontal ground through its base to be 30°. On walking a distance $80\sqrt{3}$ ft. in a certain direction, he finds the elevation of the top to be the same as before, and then on walking a distance 80 ft. at right angles to the former direction, the elevation is found to be 45°. Show that the height of the temple is 80 ft.

18. The shadow of a telegraph post is observed to be half the known height of the post, and sometime afterwards it is equal to the known height; how much will the sun have gone down in the interval, given

$$\log 2 = \cdot 30103,\ L \tan 63^\circ\ 26' = 10\cdot 3009994$$

$$\text{and diff. for } 1' = 3159.$$

19. The side of a hill faces due S., and is inclined to the horizon at an angle α. A straight railway upon it is inclined at an angle β to the horizon; show that the bearing of the railway is

$$\cos^{-1}(\cot\alpha \tan\beta) \text{ E. of N.}$$

20. A spherical time-ball of diameter d at the top of a tower subtends an angle 2α at a point on the ground from which the elevation of its centre is θ; prove that the height of the centre of the ball above the ground is $\frac{1}{2}d \sin\theta \operatorname{cosec}\alpha$.

ANSWERS

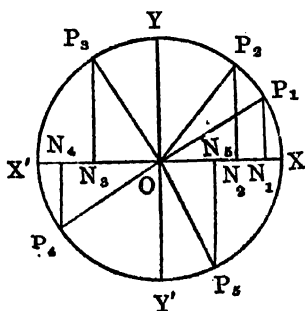
4. $\sqrt{2135}$ ft. **14.** $17^\circ\ 27'\ 30''$. **18.** $18^\circ\ 26'\ 5\cdot 8''$ nearly.

সপ্তদশ অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

(Graphs of Trigonometrical Functions)

17·1. কোন কোণ 0° হইতে 360° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে কোণানুপাতের ক্রমিক পরিবর্তন।

মনে করি যে, একটি আবর্তনকারী রেখা OX অবস্থান হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমান্বয়ে 0° হইতে 360° পর্যন্ত আবর্তন করে।

O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। বিভিন্ন অবস্থায় $\angle XOP_1$-এর কোণানুপাত নির্ণয় করিতে আমরা OP_1-কে বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান ধরিয়া লইতে পারি।

(i) সাইনের পরিবর্তন :

$\theta = \angle N_1OP_1$ শূন্য হইলে ইহার সাইন শূন্য হইবে। কোণটি 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে এবং অতিভুজ OP_1 সমান থাকিলে, বিপরীত বাহু P_1N_1 ধনাত্মক থাকিবে এবং ক্রমশঃ বর্ধিত হইবে (ত্রিভুজ N_1OP_1 এবং N_2OP_2 তুলনা করিলেই ইহা বুঝিতে পারা যায়)।

অতএব, $\sin\theta \left(=\frac{P_1N_1}{OP_1}\right)$ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইবে এবং যখন $\theta = 90°$ হইবে তখন P_2N_2 এবং OP_2 উভয়েই OY-এর সহিত মিলিয়া যাইবে। তখন $\sin\theta$-র মান হইবে বৃহত্তম এবং 1-এর সমান।

θ ক্রমশঃ 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, OP_3 অতিভুজের মান অপরিবর্তিত থাকিবে বটে, কিন্তু P_3N_3-র মান ধনাত্মক থাকিয়া OY-হইতে ক্ষুদ্রতর হইতে হইতে অবশেষে শূন্য হইবে। অতএব, $\sin\theta$-র মান 1 হইতে ক্রমশঃ শূন্য হইবে। তৃতীয় পাদে যখন θ ক্রমশঃ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হয়, তখন ঋণাত্মক থাকিয়া P_4N_4-এর আঙ্কিক মান ক্রমশঃ 0 হইতে OY'-এ

পরিবর্তিত হয়। কিন্তু অতিভুজের মান ধনাত্মক এবং অপরিবর্তিত থাকে। তখন sin θ হইবে ঋণাত্মক এবং তাহার আঙ্কিক মান শূন্য হইতে এক পর্যন্ত ক্রমশঃ পরিবর্তিত হইবে; অর্থাৎ ইহার মান ক্রমশঃ শূন্য হইতে -1 পর্যন্ত কমিতে থাকিবে। চতুর্থ পাদে θ যখন $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত ক্রমশঃ বর্ধিত হয়, তখন Q_5N_5 ঋণাত্মক থাকে কিন্তু উহার মান OY′ হইতে শূন্যে হ্রাস পাইতে থাকে; অতএব, sin θ-র মান ঋণাত্মক থাকিয়া -1 হইতে শূন্য পর্যন্ত বর্ধিত হইবে। অতএব, ফলাফল নিম্নলিখিতভাবে উল্লেখ করা যায়:

প্রথম পাদে θ যখন $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
sin θ তখন **0 হইতে 1** পর্যন্ত **বর্ধিত হয়।**

দ্বিতীয় পাদে θ যখন $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
sin θ তখন **1 হইতে 0** পর্যন্ত **কমিতে থাকে।**

তৃতীয় পাদে θ যখন $180°$ হইতে $270°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
sin θ তখন **0 হইতে -1** পর্যন্ত **কমিতে থাকে।**

চতুর্থ পাদে θ যখন $270°$ হইতে $360°$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়,
sin θ তখন **-1 হইতে 0** পর্যন্ত **বৃদ্ধি পায়।**

(ii) কোসাইনের পরিবর্তন:

প্রথম পাদে, $\angle XOP_1$ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইলে, ON_1 ক্রমশঃ কমিতে থাকে; $\theta=0$ হইলে, $ON_1=OX$ এবং $\theta=90°$ হইলে, $ON_1=0$ অর্থাৎ ON_1 সর্বদা ধনাত্মক হইবে। দ্বিতীয় পাদে, θ যখন $90°$ হইতে $180°$ পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, তখন ON_3-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OX′ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় কিন্তু সর্বদা ঋণাত্মক থাকে। তৃতীয় পাদে ON_4 ঋণাত্মক থাকে, কিন্তু ইহার আঙ্কিক মান OX′ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইতে থাকে। চতুর্থ পাদে, ON_5 ধনাত্মক এবং শূন্য হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। এই পরিবর্তনের সময় অতিভুজ সর্বদাই ধনাত্মক থাকিবে এবং তাহার মান OX বা OX′-এর সমান হইবে।

অতএব, আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হই:

θ ক্রমশঃ **$0°$ হইতে $90°$** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,
cos θ ক্রমশঃ **1 হইতে 0** পর্যন্ত **হ্রাস পাইবে।**

θ ক্রমশঃ **$90°$ হইতে $180°$** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,
cos θ ক্রমশঃ **0 হইতে -1** পর্যন্ত **হ্রাস পাইবে।**

θ ক্রমশঃ **180° হইতে 270°** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,

cos θ ক্রমশঃ **-1 হইতে 0** পর্যন্ত **বৃদ্ধি পাইবে।**

θ ক্রমশঃ **270° হইতে 360°** পর্যন্ত বর্ধিত হইলে,

cos θ ক্রমশঃ **0 হইতে 1** পর্যন্ত **বৃদ্ধি পাইবে।**

(iii) ট্যানজেণ্টের পরিবর্তন :

প্রথম পাদে, θ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়, তখন P_1N_1 ক্রমশঃ 0 হইতে OY পর্যন্ত বর্ধিত হয় এবং সঙ্গে সঙ্গে ON_1, OX হইতে শূন্যতে হ্রাস পায়, কিন্তু উভয়েই ধনাত্মক থাকে। অতএব, $\tan\theta = \frac{P_1N_1}{ON_1}$-এর মান $\frac{0}{OX} = 0$ হইতে $\frac{OY}{0}$ বা ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

দ্বিতীয় পাদে P_3N_3, OY হইতে শূন্য পর্যন্ত হ্রাস পায় ; কিন্তু ঋণাত্মক থাকিয়া ON_3-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। অতএব, $\tan\theta \left(= \frac{P_3N_3}{ON_3}\right)$ ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু আঙ্কিক মান ∞ হইতে শূন্য পর্যন্ত হ্রাস পাইবে ; অর্থাৎ $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্য্যন্ত বর্ধিত হইবে।

90°-র অব্যবহিত পূর্ব পর্যন্ত $\tan\theta$ ধনাত্মক এবং উহার মান অত্যন্ত বৃহৎ ; কিন্তু 90°-র অব্যবহিত পরে $\tan\theta$ ঋণাত্মক এবং উহার আঙ্কিক মান অত্যন্ত বৃহৎ। কাজেই যখন θ-র মান 90° স্পর্শ করিয়া প্রথম পাদ হইতে দ্বিতীয় পাদে যাইবে, তখন $\tan\theta$-র মান অতি বৃহৎ ধনাত্মক রাশি হইতে অতি বৃহৎ ঋণাত্মক রাশিতে অকস্মাৎ পরিবর্তিত হইবে। ইহার ফলে $\tan\theta$-র মানের মধ্যে অকস্মাৎ পরিবর্তন বা অসন্ততি (discontinuity) দেখা যাইবে।

তৃতীয় পাদে, P_4N_4 এবং ON_4 উভয়েই ঋণরাশি। P_4N_4-এর আঙ্কিক মান 0 হইতে OY′-এ বৃদ্ধি পাইবে কিন্তু ON_4-এর আঙ্কিক মান OX′ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে। অতএব, $\tan\theta \left(= \frac{P_4N_4}{ON_4}\right)$ ধনাত্মক এবং 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হইবে।

চতুর্থ পাদে, P_5N_5 ঋণরাশি এবং উহার আঙ্কিক মান OY′ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায়। কিন্তু ON_5 ধনরাশি এবং 0 হইতে OX পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়। অতএব, $\tan\theta \left(\frac{P_5N_5}{ON_5}\right)$ ঋণরাশি এবং উহার আঙ্কিক মান ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পায় অর্থাৎ $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

270° অতিক্রম কালে, আরও একটি অসন্ততি দেখা যায় এবং $\tan\theta$ অসীম রাশি অতিক্রমকালে অকস্মাৎ ধনরাশি হইতে ঋণরাশিতে পরিবর্তিত হয়।

অতএব, আমরা নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হই :

θ, 0° হইতে 90° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, 90° অতিক্রমকালে $\tan\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, 0 হইতে ∞ পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, 270° অতিক্রমকালে, $\tan\theta$ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, 270° হইতে 360° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, $\tan\theta$, $-\infty$ হইতে 0 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

(iv) কো-ট্যানজেণ্টের পরিবর্তন :

ট্যানজেণ্টের মানের পরিবর্তন হইতে $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ -র মানের পরিবর্তন আলোচনা করা যায়।

θ, 0° হইতে 90° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, 180° অতিক্রমকালে, $\cot\theta$ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, ∞ হইতে 0 পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, 270° হইতে 360° পর্যন্ত বৃদ্ধি পাইলে, $\cot\theta$, 0 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পাইবে।

θ, 360° অতিক্রমকালে cot θ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হইবে।

(v) সেকাণ্টের পরিবর্তন :

$\sec\theta \left(=\frac{1}{\cos\theta}\right)$ সম্পর্কে নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় :

θ, 0° হইতে 90° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, sec θ, 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

এখানে, sec θ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

তারপর, θ, 90° হইতে 180° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, sec θ, $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বর্ধিত হয়।

θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত বর্ধিত হইলে, sec θ, -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়।

এখানে পুনরায় sec θ অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

তারপর 270° হইতে 360° পর্যন্ত sec θ, $+\infty$ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

(vi) কোসেকাণ্টের পরিবর্তন :

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ সম্পর্কিত সিদ্ধান্তগুলি নিম্নরূপ :

0° হইতে 90° পর্যন্ত cosec θ ক্রমশঃ ∞ হইতে 1 পর্যন্ত হ্রাস পায়।

90° হইতে 180° পর্যন্ত cosec θ ক্রমশঃ 1 হইতে ∞ পর্যন্ত বৃদ্ধি পায়।

এখানে, cosec θ অকস্মাৎ $+\infty$ হইতে $-\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

তারপর, 180° হইতে 270° পর্যন্ত cosec θ ক্রমশঃ $-\infty$ হইতে -1 পর্যন্ত বৃদ্ধি পায় ; এবং, 270° হইতে 360° পর্যন্ত cosec θ ক্রমশঃ -1 হইতে $-\infty$ পর্যন্ত হ্রাস পায়। θ, 360° অতিক্রমকালে cosec θ পুনরায় অকস্মাৎ $-\infty$ হইতে $+\infty$ তে পরিবর্তিত হয়।

দ্রষ্টব্য। θ, 2π-এর অখণ্ড গুণিতক দ্বারা বর্ধিত হইলে সমস্ত কোণানুপাত অপরিবর্তিত থাকিবে। সুতরাং, 360°-র পরে θ বর্ধিত হইতে থাকিলে ঘূর্ণ্যমান রেখার এক একটি পূর্ণ আবর্তনের ফলে কোণানুপাতগুলির মানের একই শ্রেণীরই বারংবার পুনরাবৃত্তি ঘটিবে। সুতরাং, সমস্ত কোণানুপাতগুলিই পটাবৃত্ত অপেক্ষক (periodic function) এবং পটাবৃত্তি (period) 2π-এর সমান*।

কোণানুপাতের উল্লিখিত পরিবর্তনগুলি লেখ-র (graphs) সাহায্যে আরও সুপরিস্ফুটভাবে প্রকাশ করা যায়।

*** tan θ এবং cot θ-র পটাবৃত্তি (period) π.**

17·2. ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ (Graphs of Trigonometrical Functions) :

বীজীয় অপেক্ষকের (algebraic function) ন্যায় ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকও (যথা : $\sin x, \cos x, \sin^2 2x + \tan \frac{x}{2}$, ইত্যাদি) লেখ সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। এই সমস্ত লেখ-র সাহায্যে কোণের পরিবর্তনে কোণানুপাতের কিরূপ পরিবর্তন হয়, তাহা প্রকাশ করা হয়। ইহার প্রণালী বীজগণিতে অনুসৃত প্রণালীর অনুরূপ। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী লম্ব সরলরেখা অক্ষরেখারূপে গৃহীত হইল। x – অক্ষরেখার দিকে যথোপযুক্ত একক লইয়া কোণ স্থাপিত করা হইল (OX-এর দিকে কোণের মান ধনাত্মক এবং OX′-এর দিকে ঋণাত্মক হইবে), এবং y-অক্ষরেখার দিকে কোণের সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকের মান যথোপযুক্ত এককের সাহায্যে স্থাপিত করা হইল, (OY-এর দিকে অপেক্ষকের মান ধনাত্মক এবং OY′-এর দিকে ঋণাত্মক)। এভাবে অঙ্কিত বিন্দুগুলির ভুজ (abscissa) এবং কোটি (ordinate) যথাক্রমে কোণ এবং অপেক্ষকের মান সূচিত করিবে।

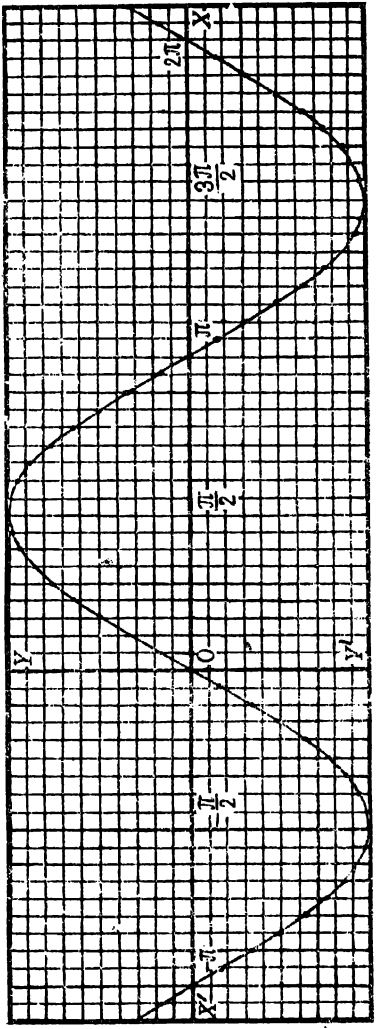
এইভাবে, অনেকগুলি বিন্দু স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখা (সরলরেখা ব্যতীত অন্য রেখা হইলেও তাহা) দ্বারা যুক্ত করিলে আমরা উদ্দিষ্ট ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ পাইব।

17·3. sin x-এর লেখ (Graph of sin x বা sine-graph) :

মনে করি, $y = \sin x$.

স্বাভাবিক সাইনের তালিকার সাহায্যে 10° ব্যবধানে x এবং y-এর অনুরূপ মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল (y-এর দুই দশমিক পর্যন্ত বিশুদ্ধ মান গৃহীত হইল)।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°	0°
y or $\sin x$	−1	−·98	−·94	−·87	−·77	−·64	−·50	−·34	−·17	0

x	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	etc.
y or $\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1	·98	·94	·87	etc.

Sine-Graph

আমরা OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10°-এর সমান এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10-টি বাহুকে একক কল্পনা করিলাম।*

এক্ষণে উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

পার্শ্বের পৃষ্ঠায় $x=-180^\circ$ হইতে $x=+360^\circ$ পর্যন্ত মান লইয়া অঙ্কিত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 1. স্বাভাবিক সাইনের তালিকায় 0° হইতে 90° পর্যন্ত সাইনের মান দেওয়া থাকে। এতদ্ব্যতীত $\sin(-\theta)=-\sin\theta$, $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$, $\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta$, ইত্যাদি সূত্রাবলীর [পঞ্চম অধ্যায়ে প্রদত্ত] সাহায্যে $(0^\circ, 90^\circ)$ সীমাবহির্ভূত কোণের কোণানুপাত নির্ণয় করা যায়।

অন্যান্য অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত করিবার সময়ও অনুরূপভাবে কোণানুপাতের তালিকা প্রস্তুত করা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. সাইন লেখ-র বৈশিষ্ট্য :

চিত্র হইতে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য লক্ষিত হয় :—

(i) লেখটি সন্তত (continuous) এবং ঢেউ-এর ন্যায় (wavy) হইবে।

(ii) $\sin x$-এর বৃহত্তম মান '1' এবং ক্ষুদ্রতম মান '-1' এবং যখন x-এর মান 90°-র অযুগ্ম গুণিতক, তখন $\sin x$-এর মান এইরূপ হইবে।

(iii) মূলবিন্দু O এবং যে সমস্ত বিন্দুতে x-এর মান π-এর গুণিতক, সেই সমস্ত বিন্দুতে $\sin x=0$.

(iv) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, $\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(-x)=-\sin x=\sin(\pi+x)$ ইত্যাদি।

(v) যেহেতু $\sin(2r\pi+x)=\sin x$, $x=0$ এবং $x=2\pi$-এর মধ্যবর্তী লেখ-র অংশটুকুরই উভয় দিকে বারংবার পুনরাবৃত্তি হইবে।

* প্রাপ্ত ছক-কাগজ এবং যে সীমার মধ্যে লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে তাহাদের উপর নির্ভর করিয়া প্রতিটি ক্ষেত্রে উপযুক্ত একক নির্ণয় করিতে হইবে।

17·4. কোসাইনের লেখ (Graph of cos x বা cosine-graph) ঃ

মনে করি যে, $y = \cos x$.

স্বাভাবিক কোসাইনের তালিকার সাহায্যে (পূর্ববর্তী অনুচ্ছেদের দ্রষ্টব্য 1 লক্ষণীয়) 10° ব্যবধানে x এবং y-এর অনুরূপ মানের নিম্নলিখিত তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	−90°	−80°	−70°	−60°	−50°	−40°	−30°	−20°	−10°
y or $\cos x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	etc.
y or $\cos x$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	−·17	−·34	etc.

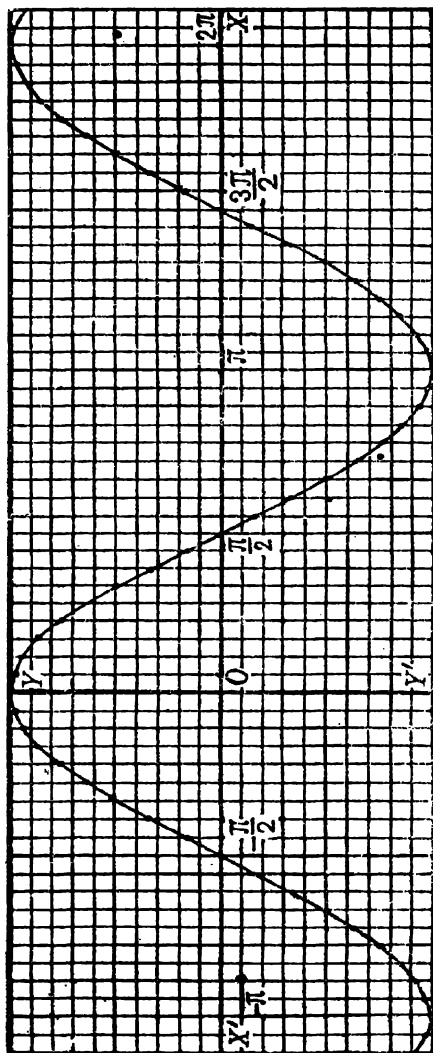
এক্ষণে OX-এর দিকের ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের দশটি বাহু একক ধরিয়া উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখাদ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে।

পার্শ্বের পৃষ্ঠায় $x = -\pi$ হইতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত মান লইয়া অঙ্কিত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ঃ চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই দেখা যায় যে, **সাইন লেখকে সমগ্র-ভাবে 90° পশ্চাতে (বামদিকে) অপসৃত করিলে ইহা অবিকল কোসাইন লেখ হইবে।**

ইহার কারণ এই যে, $\sin(90° + x) = \cos x$ বা $\sin x = \cos(x - 90°)$ হওয়ার দরুণ x-এর কোন একটি মানের জন্য সাইন লেখ-র কোটি $= x$-এর মান পূর্বক্ষেত্র অপেক্ষা 90° কম হইলে কোসাইন লেখ-র কোটি।

17·5. ট্যানজেণ্টের লেখ (Graph of tan x বা tangent-graph) ঃ

স্বাভাবিক ট্যানজেণ্টের তালিকার সাহায্যে 10° ব্যবধানে x-এর মান ধরিয়া x এবং y-এর অনুরূপ মানের নিম্নলিখিত তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

Cosine-Graph

x	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$100°$	etc.
y or $\tan x$	$-\cdot 36$	$-\cdot 18$	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞	$-5\cdot 67$	etc.

এক্ষণে OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের তিনটি বাহু একক ধরিয়া উপরের তালিকাভুক্ত মানের সংশ্লিষ্ট বিন্দুগুলি ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া উহাদিগকে স্বাধীনভাবে অঙ্কিত বক্ররেখার দ্বারা সংযুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পার্শ্বের পৃষ্ঠায় x-এর মান $-\pi$ হইতে 2π পর্যন্ত ধরিয়া লেখ অঙ্কিত করিয়া দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ঃ ট্যানজেণ্টের লেখ-র বিশেষত্ব।

লেখ হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা যায় ঃ

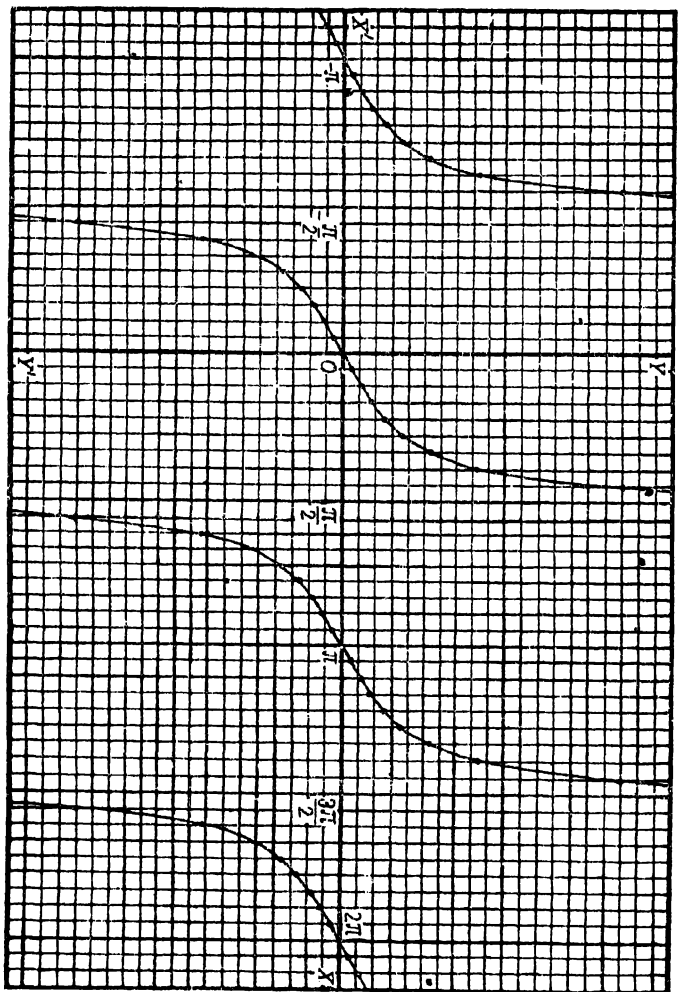
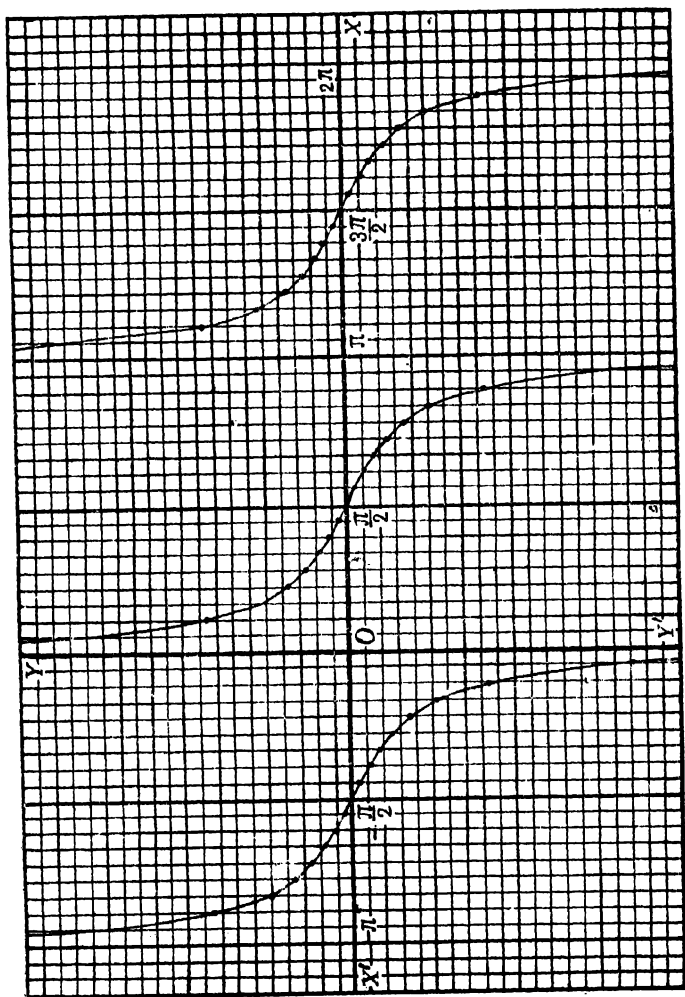
(i) লেখ সন্তত (continuous) নয় ; ইহার কয়েকটি ভিন্ন ভিন্ন শাখা আছে এবং অসন্ততি লক্ষিত হয় সেই সমস্ত বিন্দুতে যাহাদের ভুজ (x-স্থানাঙ্ক) $\frac{1}{2}\pi$-এর অযুগ্ম গুণিতক।

(ii) বামদিক হইতে ডানদিকে যখন x এই সমস্ত বিন্দু অতিক্রম করে, তখন $\tan x$ অকস্মাৎ বামদিকের অতিবৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে ডানদিকের অতিবৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিবর্তিত হয়।

(iii) x-এর মান $\frac{1}{2}\pi$-এর অযুগ্ম গুণিতক ধরিয়া অঙ্কিত y-অক্ষরেখার সহিত সমান্তরাল সরল রেখাগুলি ক্রমশঃ লেখর সহিত উভয় দিকে মিলিত হইতে চেষ্টা করে, কিন্তু বাস্তবে কখনও মিলিত হয় না। এই সমস্ত সরলরেখাকে বক্ররেখার (এস্থলে ট্যানজেণ্টের লেখটির) অসীমস্পর্শক (Asymptote) বলা হয়।

(iv) $\tan(n\pi + x) = \tan x$ বলিয়া, প্রত্যেকটি শাখা, লেখটির $x = -\frac{1}{2}\pi$ এবং $x = \frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী অংশের পুনরাবৃত্তি মাত্র।

17·6. কো-ট্যানজেণ্টের লেখ (Graph of cot x বা cotangent-graph) ঃ

পূর্বের ন্যায় x এবং y $(=\cot x)$-এর যথাযথ মানের তালিকা প্রস্তুত করিয়া ট্যানজেণ্ট লেখ-র অনুরূপ একক ধরিয়া বিন্দুগুলি স্থাপনের পর স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখার সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পরপৃষ্ঠায় $x = -\pi$ হইতে $x = 2\pi$ পর্যন্ত লেখ দেখান হইয়াছে।

Tangent-Graph

Cotangent-Graph

ট্যানজেণ্টের লেখ-র ন্যায় ইহাও অসন্তত; $x=0$ বা $n\pi$ হইলে এই অসন্ততি পরিলক্ষিত হয়। $x=0$ এবং $x=\pi$ -এর অন্তর্গত অংশেরই উভয় দিকে ক্রমাগত পুনরাবৃত্তি হইবে। ইহা $\cot(n\pi+x)=\cot x$ সূত্র হইতে সহজেই লক্ষ্য করা যায়।

17·7. কো-সেকাণ্টের লেখ (Graph of cosec x বা cosecant-graph) :

মনে করি, $y=\operatorname{cosec} x$.

অতঃপর, x-এর মান $10°$ অন্তর ধরিয়া x এবং y-এর মানের নিম্নলিখিত তালিকা গঠন করা হইল :

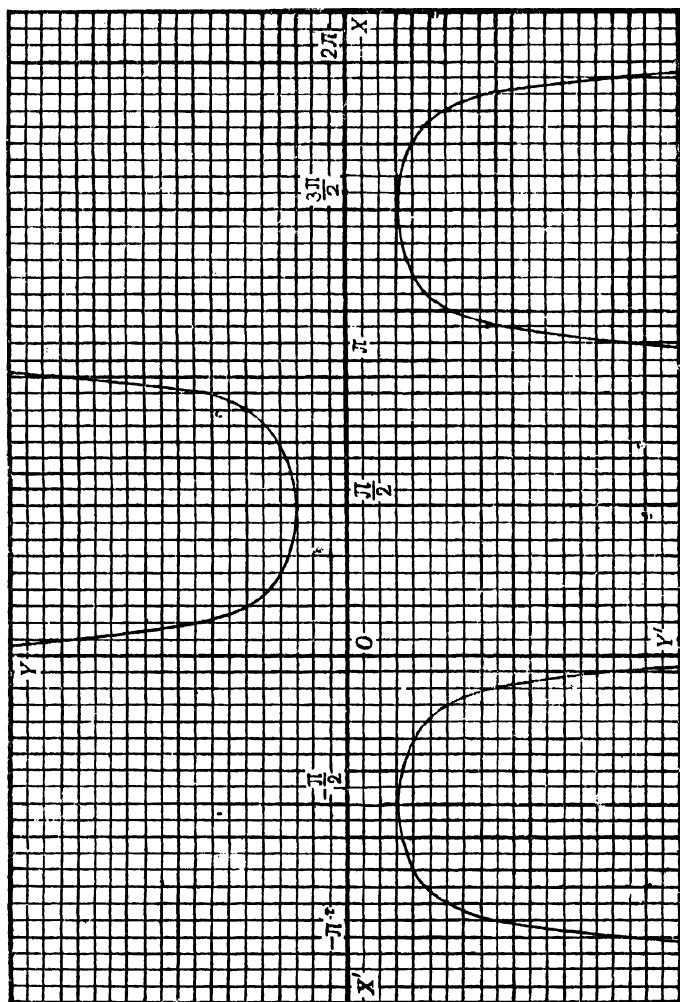
	−20°	−10°	0°	10°	20°	30°	etc.	80°	90°	100°	110°	etc.
y or cosec x	-2·92	−5·76	∞	5·76	2·92	2	etc.	1·02	1	1·02	1·06	etc.

[স্বাভাবিক কো-সেকাণ্টের তালিকা পাওয়া না গেলে স্বাভাবিক সাইনের তালিকা হইতে $\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$ এই সূত্রের সাহায্যে কোসেকাণ্টের তালিকা গঠন করা যাইতে পারে।]

OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটী বাহু $10°$ এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের তিনটি বাহু একক ধরিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি স্থাপন করিবার পর স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখার দ্বারা যুক্ত করা হইল। $x=-\pi$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত লেখ পরপৃষ্ঠায় দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : এই লেখটিও কতকগুলি বিচ্ছিন্ন অংশের সমষ্টি এবং $x=0$ বা π-এর গুণিতক হইলে অসন্ততি দেখা যায়। y-এর মান কখনও ± 1 -এর অন্তর্বর্তী হইবে না; ইহা সর্বদা '1' হইতে বৃহত্তর বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। $x=0$ বা $n\pi$, এই রেখাগুলি অসীম স্পর্শক। $x=0$ এবং $x=2\pi$ -এর মধ্যবর্তী অংশটি উভয় দিকে ক্রমাগত পুনরঙ্কিত হইতে থাকিবে।

17·8. সেকাণ্টের লেখ (Graph of sec x বা secant-graph) :

x এবং y ($=\sec x$) -এর মানের তালিকা প্রস্তুত করা হইল। (সেকাণ্টের তালিকা না পাওয়া গেলে কোসাইনের তালিকা হইতে ইহা গঠন করিতে

Cosecant-Graph

হইবে।) কোসেকান্টের লেখ-র অনুরূপ স্কেলে বিন্দুগুলি স্থাপন করিয়া যুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট লেখ পাওয়া যাইবে। পরবর্তী পৃষ্ঠায় $x=-\pi$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত লেখ দেখান হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য: চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, কোসেকান্টের লেখকে 90° বামদিকে অপসারণ করিলে অবিকল সেকান্ট লেখ পাওয়া যায়।

ইহার কারণ $\operatorname{cosec}(90^\circ+x)=\sec x$. [17·4 অনুচ্ছেদের দ্রষ্টব্য লক্ষণীয়]

17·9. অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক রাশিমালার লেখ (Graphs of other Trigonometrical Expressions):

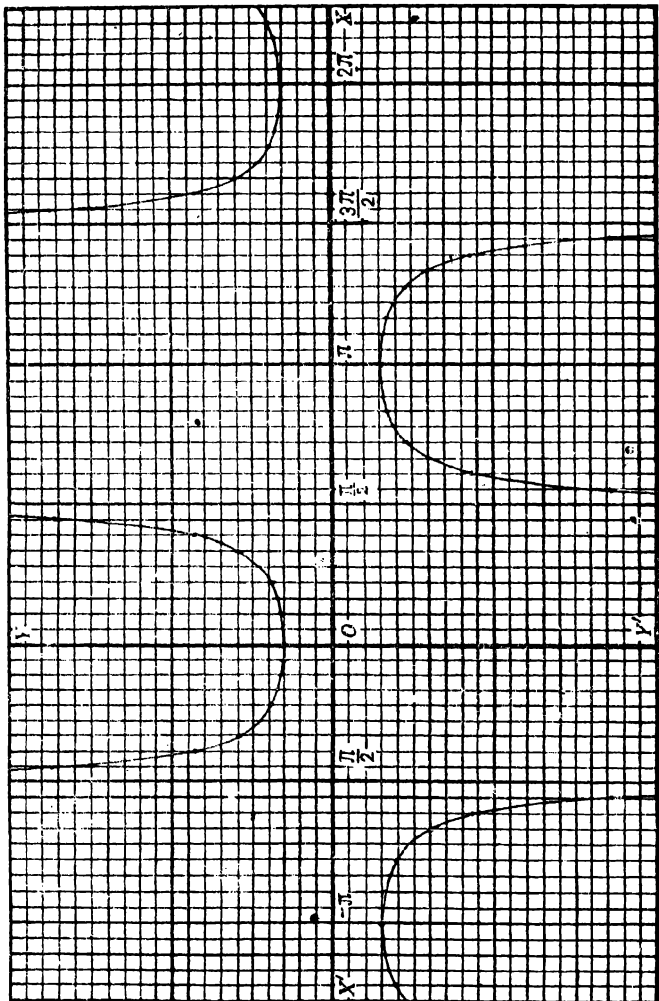
পূর্বোক্ত প্রণালীর অনুরূপ প্রণালীতে অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখও অঙ্কিত করা যায়। একটি উদাহরণ নিম্নে দেওয়া হইতেছে।

Ex. *Draw the graph of $y=\sin x+\cos x$ between the range $x=0$ to $x=2\pi$, and find from the graph the values of x for which (i) $y=0$, (ii) y is maximum, (iii) y is minimum.* [U. P. 1934]

স্বাভাবিক কোসাইন এবং সাইনের তালিকা হইতে x-এর বিভিন্ন মান অনুযায়ী $\sin x$ এবং $\cos x$-এর মান পৃথক্‌ভাবে লিখিয়া যোগ করিলে y-এর মান পাওয়া যায়। অথবা $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\,(\sin x\cos\frac{1}{4}\pi+\cos x\sin\frac{1}{4}\pi)=\sqrt{2}\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$ ধরিয়া সাইনের তালিকা হইতে x-এর মান অনুযায়ী $\sin(x+\frac{1}{4}\pi)$-এর মান নির্ণয় করা যায়, এবং পরে উহাকে $\sqrt{2}=1·414$ দ্বারা গুণ করিলে y-এর মান নির্ণীত হইবে।

x-এর মান 10° ব্যবধানে ধরিয়া $x=0$ হইতে $x=2\pi$ পর্যন্ত x এবং y-এর মানের তালিকা গঠন করা যায়। ইহাতে আমরা নিম্নলিখিত তালিকা পাই:

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
y	1	1·15	1·27	1·37	1·41	1·41	1·37	1·27	1·15	1	·81

x	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°
y	·59	·37	·13	−·13	−·37	−·59	−·81	−1	−1·15	−1·27

Secant-Graph

x	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	−1·37	−1·41	−1·41	−1·37	−1·27	−1·15	−1	−·81

x	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	−·59	−·37	−·13	·13	·37	·59	·81	1

এক্ষণে, OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10° এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10-টি বাহুকে একক সূচিত করিয়া তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজে স্থাপন করিবার পর স্বাধীনভাবে অঙ্কিত রেখার দ্বারা সংযুক্ত করিলেই লেখটি পাওয়া যাইবে (পর পৃষ্ঠায় দেখান হইয়াছে)।

লেখ হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, (i) $x=135°$ এবং $315°$ হইলে $y=0$. (ii) $x=45°$ হইলে y বৃহত্তম, (iii) $x=225°$ হইলে y ক্ষুদ্রতম।

17·10. সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Graphical solution of equations) :

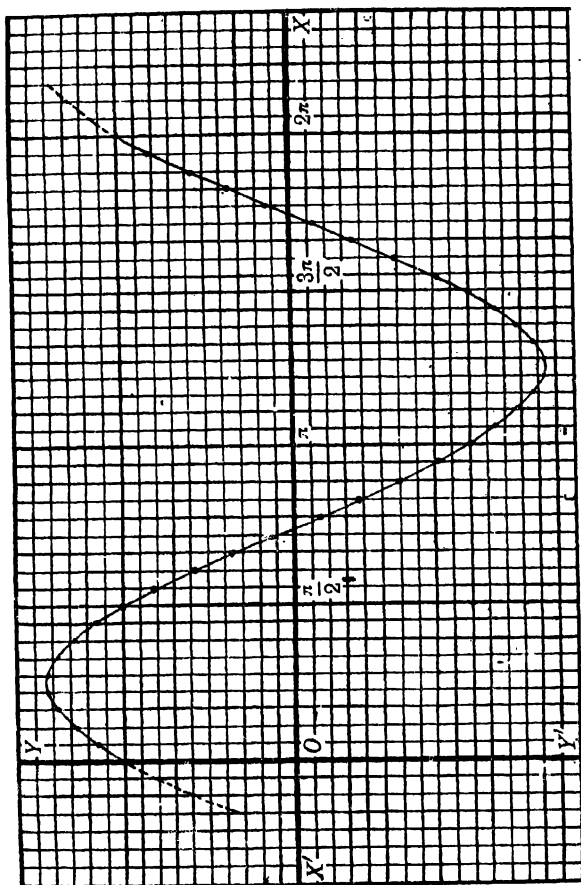
বীজীয় সমীকরণের ন্যায় ত্রিকোণমিতিক সমীকরণও লেখ-র সাহায্যে সমাধান করা যায়; বস্তুতঃ বহু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে [বিশেষতঃ যে সমস্ত ক্ষেত্রে সমাধান প্রমাণ কোণ (standard angle) নয়], দেখা যায় যে, একমাত্র লৈখিক পদ্ধতিই সমাধান করিবার পক্ষে সুবিধাজনক। এই পদ্ধতি নিম্নে দুইটি দৃষ্টান্ত দ্বারা দেখান হইতেছে :

Ex. 1. *Solve graphically the equation* $2 \sin^2 x = \cos 2x$, *giving only those solutions of* x *which lie between* $-\frac{1}{2}\pi$ *and* $\frac{3}{2}\pi$.
[C. U. 1938, '46, '48]

এক্ষেত্রে, $y = 2 \sin^2 x = (1 - \cos 2x)$,

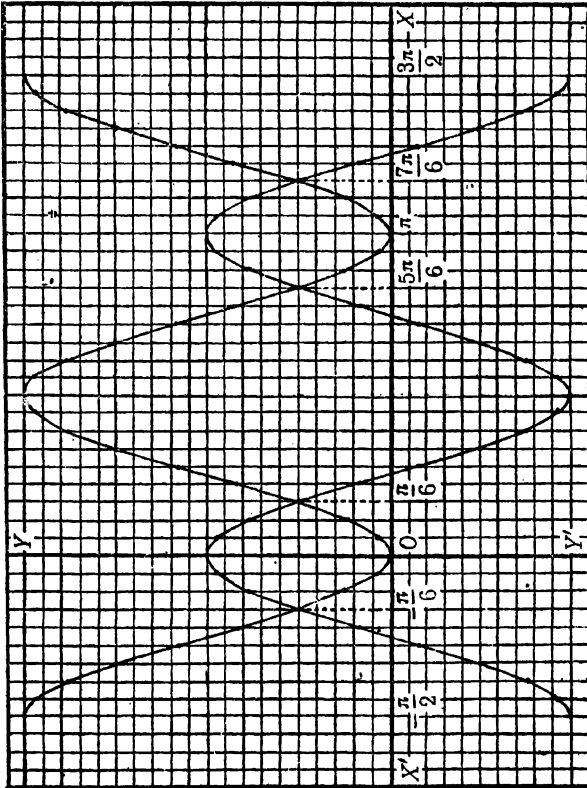
এবং $y = \cos 2x$,

এই দুইটি সমীকরণের লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে। প্রথমে আমরা স্বাভাবিক কোসাইনের তালিকার সাহায্যে $\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$ এর মধ্যবর্তী x-এর মান 10° বা 15° ব্যবধানে রাখিয়া x এবং y-এর অনুরূপ মানগুলির তালিকা উভয় লেখ-র ক্ষেত্রে পৃথক্‌ভাবে গঠন করিলাম।

Graph of sin x + cos x

পূর্ববর্তী ক্ষেত্রগুলির ন্যায় একই স্কেলের সাহায্যে (অর্থাৎ OX-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহু 10°-এর সমান এবং OY-এর দিকে ক্ষুদ্র বর্গের 10টি বাহু এককের সমান কল্পনা করিয়া) আমরা উভয় ক্ষেত্রের তালিকাভুক্ত মানের

অনুরূপ বিন্দুগুলি একই ছক-কাগজে স্থাপন করিয়া দুইটি লেখ অঙ্কিত করিলাম (নিম্নে দেখান হইয়াছে)।

দেখা যাইতেছে যে, লেখ দুইটি যে সকল বিন্দুতে ছেদ করিতেছে তাহাদের ভুজ $-\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{7}{6}\pi$.

অতএব, $2\sin^2 x = \cos 2x$ সমীকরণটি সত্য হয়, যখন $x = -\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$ এবং এইগুলিই $-\frac{1}{2}\pi$ এবং $\frac{3}{2}\pi$ এর মধ্যবর্তী x-এর সমাধান।

Graphical solution of $2\sin^2 x = \cos 2x$.

Ex. 2. *Solve graphically the equation* $\tan x = 2x$ *between* $x = 0$ *and* $x = \frac{1}{2}\pi$. [C. U. 1939]

এক্ষেত্রে x-এর পরিমাপ রেডিয়ানে গণ্য করা হইল।

আমরা প্রথমে $y = 2x$ ... (1)

এবং $y = \tan x$ ... (2)

এই দুইটি সমীকরণের দুইটি লেখ অঙ্কন করি।

$x = 0$ এবং $x = \frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী x এবং y-এর অনুরূপ মানের তালিকা গঠন করা হইল।

(1)-এর ক্ষেত্রে :

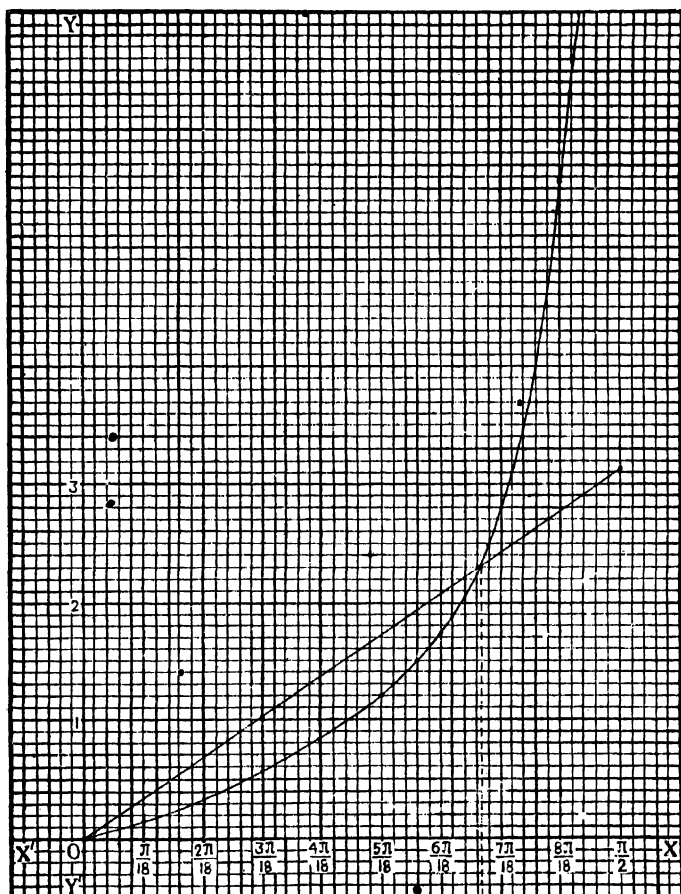
x (রেডিয়ানে)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y (অর্থাৎ $2x$) (আঙ্কিক মান)	0	1·05	2·10	3·15

(2)-এর ক্ষেত্রে :

x (রেডিয়ানে)	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
y (অর্থাৎ $\tan x$) (আঙ্কিক মান)	0	·18	·36	·57	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞

OX-এর দিকে 5টি ক্ষুদ্র বাহুকে $\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান এবং OY-এর দিকে 10টি ক্ষুদ্র বাহু একক ধরিয়া আমরা উভয় সমীকরণের তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি একই ছক-কাগজে স্থাপন করিলাম। এই সকল বিন্দুগুলি যোগ করিলে আমরা $x = 0$ এবং $\frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যে দুইটি লেখ পাইব। (সংলগ্ন চিত্র দ্রষ্টব্য)

আমরা দেখিতে পাই যে, লেখ দুইটি $x = 0$ বিন্দুতে এবং যাহার ভুজ ক্ষুদ্র বর্গের 33·5 বাহুর সমান সেইরূপ আর একটি বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে

33·5 বাহু আমাদের কল্পিত এককে প্রায় $\frac{33 \cdot 5}{5} \times \frac{\pi}{18}$ বা 1·17 রেডিয়ান।

Graphical solution of tan $x = 2x$.

অতএব, 0 এবং $\frac{1}{2}\pi$-এর মধ্যবর্তী x-এর যে সমস্ত মান $\tan x = 2x$ সমীকরণটির পক্ষে সম্ভব, তাহা যথাক্রমে $x = 0$ ও 1·17 ; এই দুইটিই উপরোক্ত সমীকরণের সমাধান।

Examples XVII

1. Draw the graphs of

(i) $\sin 3x$ between $x=0^\circ$ to $x=180^\circ$.

(ii) $\tan \frac{3}{2}x$ between $x=-\frac{1}{2}\pi$ to $x=\pi$.

(iii) $\sin\theta\cos\theta$ between $\theta=-\pi$ to $\theta=+\pi$

(iv) $\dfrac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$ between $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$ to $+\dfrac{\pi}{2}$.

(v) $\cos(\pi\sin x)$ between $x=0$ to $x=\frac{1}{2}\pi$.

(vi) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ between $\theta=0$ to $\theta=\pi$.

(vii) $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{1}{2}x$ between $x=0$ to $x=2\pi$.

2. (i) Trace the changes in the sign of $\cos\theta-\sin\theta$ as θ changes from 0° to 360°. Verify your conclusions by a graph.

(ii) Trace the changes in sign and magnitude of $\dfrac{2\sin\theta-\sin 2\theta}{2\sin\theta+\sin 2\theta}$. [B. H. U. 1931]

3. Draw the graph of $y=\sin(x+\frac{1}{2}\pi)$ between the limits $x=-\pi$ and $x=+\pi$.

4. Draw the graphs of $\sin\theta$ and $\cos\theta$ between $\theta=0$ and $\theta=\pi$. Find the points where the graphs intersect. [C. U. 1936, '46]

5. Construct the graphs of $\tan x$ and $\cos x$ between 0 and $\frac{1}{2}\pi$ for x, making a tabulation of the values of y dividing the interval into 9 equal parts.

If $\tan x=\cos x$, find approximately the value of x from the above two graphs. [C U. 1943]

6. Obtain graphically a solution of the equation $\tan x=1$, between $x=0$ and $x=\frac{1}{2}\pi$. [C. U. 1937]

[*Draw the graphs of $y=\tan x$ and $y=1$*]

7. Draw the graph of $\cos x-\sin 2x$ for values of x lying between 0° and 90°, and hence obtain the least value of $\cos x-\sin 2x$ in this range.

8. Solve graphically the equations :

(i) $x-\tan x=0$, between $x=0$ and $x=\frac{1}{2}\pi$. [C. U. 1945]

(ii) $5 \sin \theta + 2 \cos \theta = 5$, between $\theta = 0°$ and $\theta = 270°$.
[C. U. 1947]

[*Draw the graphs of $y = 5 \sin \theta + 2 \cos \theta$ and $y = 5$ and find the common points.*]

(iii) $\cot \theta - \tan \theta = 2$, between $\theta = 0$ and $\theta = \pi$.
[C. U. 1949]

(iv) $\operatorname{cosec} x = \cot x + \sqrt{3}$, between $x = 0$ and $x = \pi$.

(v) $\cos x = \sin 2x + \frac{1}{2}$, between $x = -\frac{1}{2}\pi$ and $x = +\frac{1}{2}\pi$.

(vi) $5 - \tan x = 2x$, between 0 and 2π.

(vii) $2 \sin x + x - 3 = 0$.

(viii) $x^2 = \cos x$.

(ix) $x = \cos^2 x$.

[*Draw the graphs of $y = \cos 2x$ and $y = 2x - 1$.*]

9. Represent by a graph the displacement given by
$$s = 2 \sin t + \sin 3t.$$

10. Show graphically that the equation $2 \sin x + \cos 2x = \frac{1}{2}x$ has only three real roots.

11. Sketch the graphs :

$y = x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, in $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. From the nature of graphs near the origin, can you suggest any relation among them at the origin ? [C. U. 1952]

ANSWERS

4. $\theta = \frac{1}{4}\pi$. **5.** $x = 38° 10'$ nearly. **6.** $\frac{1}{4}\pi$. **7.** $-·37$ nearly.

8. (i) $x = 0$. (ii) 46° 25′ (nearly) and 90°. (iii) $22\frac{1}{2}°$ and $112\frac{1}{2}°$.
(iv) $\frac{2}{3}\pi$. (v) 14° nearly. (vi) 1·19, 2·72, 4·92.
(vii) 1·16, 3·28, 4·95. (viii) $\pm·82$. (ix) ·64.

অষ্টাদশ অধ্যায়

পরিশিষ্ট (APPENDIX)

Sec. A—অপনয়ন (Elimination)

18·1. কোন কোন ক্ষেত্রে কয়েকটি নির্দিষ্ট সমীকরণ হইতে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকের অপনয়ন খুবই প্রয়োজন হইয়া পড়ে। এই সম্পর্কে কোন বাঁধাধরা নিয়ম নাই; সমীকরণের রূপ হইতেই তাহা অনুমান করিতে হইবে এবং বীজগণিতের সাধারণ কৌশল ও ত্রিকোণমিতির সূত্রাবলীও এই সঙ্গে প্রয়োগ করিতে হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলিতে অপনয়নের কয়েকটি বিশিষ্ট কৌশলের প্রয়োগ দেখান হইয়াছে।

Ex. 1. *Eliminate θ between the equations*

$$a \cos\theta + b \sin\theta + c = 0$$

$$a' \cos\theta + b' \sin\theta + c' = 0.$$

বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্যে প্রদত্ত সমীকরণ দুইটি হইতে আমরা লিখিতে পারি

$$\frac{\cos\theta}{bc' - b'c} = \frac{\sin\theta}{ca' - c'a} = \frac{1}{ab' - a'b}.$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b} \quad \text{এবং} \quad \sin\theta = \frac{ca' - c'a}{ab' - a'b}.$$

উভয়কে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 = (ab' - a'b)^2.$$

Ex. 2. *Eliminate θ from the equations*

$$x \sin\theta + y \cos\theta = 2a \sin 2\theta$$

$$x \cos\theta - y \sin\theta = a \cos 2\theta.$$

উপরোক্ত সমীকরণ দুইটিকে x এবং y-এর সহ-সমীকরণ হিসাবে সমাধান করিলে, ইহা দেখা যায় যে,

$$x = a(\cos 2\theta \cos\theta + 2 \sin 2\theta \sin\theta)$$

$$= a[\cos(2\theta - \theta) + \sin 2\theta \sin\theta]$$

$$= a[\cos\theta + 2 \sin^2\theta \cos\theta]$$

এবং $y=a(2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)$

$$=a(\sin\theta+\sin 2\theta\cos\theta)=a(\sin\theta+2\sin\theta\cos^2\theta).$$

$\therefore\ x+y=a(\sin\theta+\cos\theta)(1+2\sin\theta\cos\theta).$

$$=a(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)^2=a(\cos\theta+\sin\theta)^3.$$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,

$$x-y=a(\cos\theta-\sin\theta)(1-2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=a(\cos\theta-\sin\theta)^3.$$

$$\therefore\quad a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta+\sin\theta)=(x+y)^{\frac{1}{3}}\qquad\cdots\qquad(i)$$

$$a^{\frac{1}{3}}(\cos\theta-\sin\theta)=(x-y)^{\frac{1}{3}}\qquad\cdots\qquad(ii)$$

অতএব, উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া যোগ করিলে,

$$(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}}.$$

Ex. 3. *Eliminate x and y from the equations*

$$a\sin^2x+b\cos^2x=c$$
$$b\sin^2y+a\cos^2y=d,$$
$$a\tan x=b\tan y.$$

প্রথম সমীকরণ হইতে,

$$a\sin^2x+b\cos^2x=c(\sin^2x+\cos^2x)$$

$$\therefore\quad (a-c)\sin^2x=(c-b)\cos^2x.\quad\therefore\quad \tan^2x=\frac{c-b}{a-c}.$$

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে আমরা লিখিতে পারি যে,

$$b\sin^2y+a\cos^2y=d\,(\sin^2y+\cos^2y).\quad\therefore\quad \tan^2y=\frac{d-a}{b-d}$$

তৃতীয় সমীকরণ হইতে, $a^2\tan^2x=b^2\tan^2y$

$$\therefore\quad \frac{a^2(c-b)}{a-c}=\frac{b^2(d-a)}{b-d}$$

অতঃপর, সরল করিয়া আমরা নিম্নলিখিত অভেদটি পাই :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}.$$

Examples XVIII

Eliminate θ from the following pair of equations :—

1. $\cot\theta(1+\sin\theta)=4a$
   $\cot\theta(1-\sin\theta)=4b.$

2. $x=a\cos\theta+b\cos 2\theta$
   $y=a\sin\theta+b\sin 2\theta.$

3. $x=\tan\theta+\tan 2\theta$
   $y=\cot\theta+\cot 2\theta.$

4. $a\sin\theta+b\cos\theta=1$
   $a\operatorname{cosec}\theta-b\sec\theta=1.$

5. $x=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta$
   $y=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta.$

6. $x+a=a(2\cos\theta-\cos 2\theta)$
   $y=a(2\sin\theta-\sin 2\theta).$

7. $x=3\sin\theta-\sin 3\theta$
   $y=\cos 3\theta+3\cos\theta.$

8. $x=\cot\theta+\tan\theta$
   $y=\sec\theta-\cos\theta.$

9. $x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{x^2+y^2}$
   $\dfrac{\cos^2\theta}{a^2}+\dfrac{\sin^2\theta}{b^2}=\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

10. $\dfrac{x}{a}=\cos\theta+\cos 2\theta$
    $\dfrac{y}{b}=\sin\theta+\sin 2\theta.$

11. $\dfrac{ax}{\cos\theta}-\dfrac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
    $\dfrac{ax\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{by\cos\theta}{\sin^2\theta}=0.$

12. $\dfrac{x}{a}\cos\theta-\dfrac{y}{b}\sin\theta=\cos 2\theta$
    $\dfrac{x}{a}\sin\theta+\dfrac{y}{b}\cos\theta=2\sin 2\theta.$

13. $x=\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta$
    $y=\sec\theta-\cos\theta.$

14. $\sin\theta+\cos\theta=a$
    $\sin^3\theta+\cos^3\theta=b.$

15. $\dfrac{x}{a}\cos\theta+\dfrac{y}{b}\sin\theta=1$
    $x\sin\theta-y\cos\theta=(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{1}{2}}.$

Eliminate θ and ϕ from the following equations (*Ex.* 16-19) :—

16. $\sin\theta+\sin\phi=x,\ \cos\theta+\cos\phi=y,\ \theta-\phi=a.$

17. $\tan\theta+\tan\phi=a,\ \cot\theta+\cot\phi=b,\ \theta+\phi=a.$

18. $a\sin^2\theta+b\cos^2\theta=a\cos^2\phi+b\sin^2\phi=1,\ a\tan\theta=b\tan\phi.$

19. $\sin\theta + \sin\phi = a$, $\cos\theta + \cos\phi = b$, $\sin 2\theta + \sin 2\phi = 2c$.

20. If $(a+b)\tan(\theta-\phi) = (a-b)\tan(\theta+\phi)$ and
$a\cos 2\phi + b\cos 2\theta = c$, show that $a^2 - b^2 + c^2 = 2ac\cos 2\phi$.

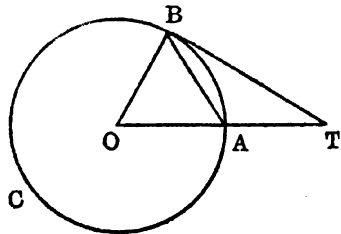
ANSWERS

1. $(a^2-b^2)^2 = ab$.
2. $a^2\{(x+b)^2+y^2\} = (x^2+y^2-b^2)^2$.
3. $(x+3y)^2 = xy^2(x+2y)$.
4. $a^2+b^2 = 1+b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{4}{3}}$.
5. $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2$.
6. $(x^2+y^2+2ax)^2 = 4a^2(x^2+y^2)$.
7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}$.
8. $x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}} = 1$.
9. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
10. $\frac{2x}{a} = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-3\right)$.
11. $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$.
12. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2$.
13. $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}) = 1$.
14. $3a-2b = a^3$.
15. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a+b$.
16. $x^2+y^2-2\cos\alpha = 2$.
17. $ab = (b-a)\tan\alpha$.
18. $a+b = 2ab$.
19. $(ab-c)(a^2+b^2) = 2ab$.

Sec. B

কোনও ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের বৃত্তীয়মান θ হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\sin\theta < \theta < \tan\theta$.

মনে করি, ABC একটি O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত এবং r ইহার ব্যাসার্ধ। মনে করি, $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান। B বিন্দুতে BT স্পর্শক টানিলে ইহা OA-এর বর্ধিতাংশকে T বিন্দুতে ছেদ করে। $\therefore$ $BT = r\tan\theta$.

উপরন্তু, আমরা জানি যে, একটি r-ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কোন অংশ যদি কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে এই বৃত্তাংশটির ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}r^2\theta$.

চিত্র হইতে ইহা স্পষ্টই বুঝা যায় যে,

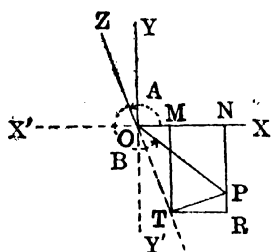
$\triangle OAB < OAB$ বৃত্তাংশ $< \triangle OBT.$

$\therefore \quad \frac{1}{2}r^2 \sin\theta < \frac{1}{2}r^2\theta < \frac{1}{2}r.r \tan\theta.$

অর্থাৎ $\quad \sin\theta < \theta < \tan\theta.$

Sec. C

1. A এবং B-এর যে-কোন মান হইলে sin (A+B) এবং cos (A+B)-এর সংশ্লিষ্ট সূত্রের প্রমাণ ঃ—

6·1-অনুচ্ছেদে A, B এবং A + B সূক্ষ্মকোণ কল্পনা করিয়া sin (A + B) এবং cos (A + B)-এর সংশ্লিষ্ট সূত্রের জ্যামিতিক প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। আমরা এখন উহা আরও ব্যাপকভাবে প্রমাণ করিব।

একটি রেখা OX হইতে আবর্তন আরম্ভ করিয়া $\angle XOZ = A$, এবং আরও আবর্তন করিয়া $\angle ZOP = B$ উৎপন্ন করে ; অতএব, উৎপন্ন সমগ্র কোণ (A + B)-এর সমান। আবর্তনকারী সরলরেখার শেষ অবস্থানের উপর যে-কোন বিন্দু P হইতে OX এবং OZ-এর উপর (প্রয়োজনবোধে বর্ধিত করিয়া) যথাক্রমে PN এবং PT লম্ব অঙ্কিত করা হইল এবং T বিন্দু হইতে TM এবং TR যথাক্রমে OX এবং PN-এর উপর (প্রয়োজনবোধে বর্ধিত করিয়া) লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

উপরের চিত্রে $\angle POT = B - 180°$ এবং যেহেতু PN এবং PT যথাক্রমে OX এবং OZ-এর উপর লম্ব, অতএব

$$\angle TPR = \angle TON = 180° - \angle XOZ = 180° - A.$$

NOP ত্রিভুজ হইতে sin (A + B) এবং cos (A + B)-এর আলোচনাকালে লক্ষ্য করিতে হইবে যে, PN ঋনাত্মক এবং ON ও OP ধনাত্মক।

যদি আমরা OTM, PTR এবং OPT ত্রিভুজগুলির মাত্র ধনাত্মক মানগুলি কল্পনা করি, তাহা হইলে উপযুক্ত চিহ্নসহ PN-কে −(TM − PR) এবং ON-কে OM + TR-এর সমান লেখা যায়। এক্ষণে চিত্র হইতে,

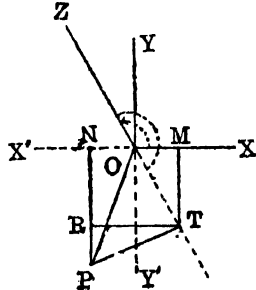
$$\sin(A+B) = \frac{PN}{OP} = \frac{TM - PR}{OP}$$

$$= -\frac{TM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}+\frac{PR}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$$
$$= -\sin TOM \cos POT + \cos TPR \sin POT$$
$$= -\sin(180^\circ - A)\cos(B-180^\circ)$$
$$+\cos(180^\circ - A)\sin(B-180^\circ)$$
$$= -\sin A(-\cos B)+(-\cos A)(-\sin B)$$
$$= \sin A\cos B + \cos A \sin B.$$

পুনরায়, $\cos(A+B)=\frac{ON}{OP}=\frac{OM+RT}{OP}=\frac{OM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}+\frac{RT}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$

$$= \cos TOM \cos POT + \sin TPR \sin POT$$
$$= \cos(180^\circ - A)\cos(B-180^\circ)$$
$$+\sin(180^\circ - A)\sin(B-180^\circ)$$
$$= (-\cos A)(-\cos B)+\sin A(-\sin B)$$
$$= \cos A\cos B - \sin A \sin B.$$

2. sin (A – B) এবং cos (A – B)-এর আরও ব্যাপক প্রমাণ (6·2 অনুচ্ছেদের সামান্যীকরণ) :—

এক্ষেত্রে XOZ কোণের ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতাভিমুখী পরিমাপ A, এবং ZOP কোণের ঘড়ির কাঁটার গতির অভিমুখী পরিমাপ B ; সুতরাং ঘড়ির কাঁটার গতির বিপরীতাভিমুখী পরিমাপ লইলে XOP-এর মান A – B ; P হইতে PN এবং PT যথাক্রমে OX এবং OZ (চিত্রে বর্ধিতাংশের) এর উপর লম্ব ; T হইতে TM এবং TR যথাক্রমে OX এবং PN-এর উপর লম্ব টানা হইয়াছে। বর্তমান চিত্রে TOM এবং POT কোণদ্বয়ের পরিমাপ যথাক্রমে 180° – A এবং B – 180° এবং PNOT বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া (∠N এবং ∠T সমকোণ) ∠RPT = ∠TOM = 180° – A (পরিমাপে)।

এক্ষণে, NOP ত্রিভুজের সাহায্যে sin (A – B) এবং cos (A – B)-এর পরিমাপ আলোচনা করিতে হইলে PN এবং ON-এর চিহ্ন ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

অতএব, $\sin(A-B)=\dfrac{PN}{OP}=-\dfrac{MT+PR}{OP}$ (MT, PR ইত্যাদির কেবলমাত্র মান গণ্য করিয়া)

$$=-\frac{MT}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}-\frac{PR}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}$$
$$=-\sin TOM\cos POT-\cos RPT\sin POT$$
$$=-\sin(180^\circ-A)\cos(B-180^\circ)-\cos(180^\circ-A)\sin(B-180^\circ)$$
$$=-\sin A(-\cos B)-(-\cos A)(-\sin B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

অনুরূপভাবে, $\cos(A-B)=\dfrac{ON}{OP}$ [ON-এর উপযুক্ত চিহ্ন ধরিলে]

$$=-\frac{RT-OM}{OP}$$ [RT, OM ইত্যাদির কেবলমাত্র আঙ্কিক পরিমাপ ধরিয়া]

$$=-\frac{RT}{PT}\cdot\frac{PT}{OP}+\frac{OM}{OT}\cdot\frac{OT}{OP}$$
$$=-\sin RPT\sin POT+\cos TOM\cos POT$$
$$=-\sin(180^\circ-A)\sin(B-180^\circ)+\cos(180^\circ-A)\cos(B-180^\circ)$$
$$=-\sin A(-\sin B)+(-\cos A)(-\cos B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

3. $\sin(A\pm B)$, $\cos(A\pm B)$-র কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র।

প্রথম ক্ষেত্র : A এবং B উভয়েই সূক্ষ্মকোণ, কিন্তু $A+B>90^\circ$.

অঙ্কন 6·1 অনুচ্ছেদের অনুরূপ ; এক্ষেত্রে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু Q, XO-র বর্ধিতাংশের উপর পড়িবে।

$$\angle TPR = 90^\circ - \angle TRP = \angle TRO = \angle ROS = A.$$

$$\sin(A+B) = \sin XOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{QT+PT}{OP} = \frac{RS+PT}{OP}$$

$$= \frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP} + \frac{PT}{PR}.\frac{PR}{OP}$$

$$= \sin A \cos B + \cos TPR \sin B$$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B.$$

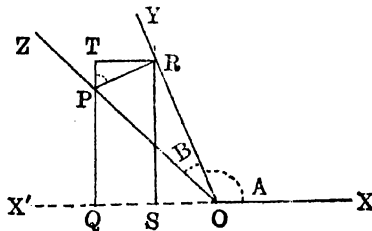
$$\cos(A+B) = \cos XOP = -\frac{OQ}{OP}$$ [OQ-র কেবলমাত্র আঙ্কিক মান ধরা হইয়াছে]

$$= -\frac{SQ-SO}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{SQ}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{TR}{OP}$$

$$= \frac{OS}{OR}.\frac{OR}{OP} - \frac{TR}{PR}.\frac{PR}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin TPR \sin B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : A স্থূলকোণ, B সূক্ষ্মকোণ, কিন্তু $A+B < 180^\circ$

অঙ্কন 6·1 অনুচ্ছেদের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে, $\angle TPR = 180^\circ - \angle RPQ = \angle ROQ = 180^\circ - A.$

$\therefore$ $\sin TPR = \sin A,\ \cos TPR = -\cos A.$

$$\sin(A+B) = \sin XOP = \frac{PQ}{OP} = \frac{QT-TP}{OP} = \frac{RS-PT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{PT}{OP}$$

$$=\frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP}-\frac{PT}{PR}.\frac{PR}{OP}$$

$=\sin A\cos B-\cos TPR.\sin B.$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

$\cos(A+B)=\cos XOP=-\frac{OQ}{OP}$ [OQ-র কেবলমাত্র আঙ্কিক পরিমাপ লইয়া]

$$=-\frac{OS+SQ}{OP}=-\frac{OS}{OP}-\frac{SQ}{OP}=-\frac{OS}{OP}-\frac{TR}{OP}$$

$$=-\frac{OS}{OR}.\frac{OR}{OP}-\frac{TR}{PR}.\frac{PR}{OP}$$

$=\cos A\cos B-\sin TPR\sin B$

$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

তৃতীয় ক্ষেত্র : A এবং B উভয়েই স্থূলকোণ, কিন্তু A − B সূক্ষ্মকোণ।

অঙ্কন 6·2 অনুচ্ছেদের অনুরূপ।

এক্ষেত্রে $\angle TPR=\angle ROS=180°-A.$

$$\sin(A-B)=\sin POQ=\frac{PQ}{OP}=\frac{PT-RS}{OP}=\frac{PT}{OP}-\frac{RS}{OP}$$

$$=\frac{PT}{PR}.\frac{PR}{OP}-\frac{RS}{OR}.\frac{OR}{OP}$$

$=\cos TPR\sin POR-\sin ROS\cos POR$

$=\cos(180°-A)\sin(180°-B)$

$\quad -\sin(180°-A)\cos(180°-B)$

$=-\cos A\sin B-\sin A(-\cos B)$

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$

$$\therefore \cos(A-B)=\cos POQ=\frac{OQ}{OP}=\frac{OS+SQ}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{RT}{OP}$$

$$=\frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP}+\frac{RT}{PR}\cdot\frac{PR}{OP}$$

$$=\cos ROS\cos POR+\sin TPR\sin POR$$

$$=\cos(180^\circ-A)\cos(180^\circ-B)+\sin(180^\circ-A)\sin(180^\circ-B)$$

$$=(-\cos A)(-\cos B)+\sin A\sin B$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

দ্রষ্টব্য। অন্যান্য বিশিষ্ট ক্ষেত্রেও উপরোক্ত চারিটি সূত্র প্রমাণ করা যায়। উহাদের অঙ্কন ও প্রমাণের পদ্ধতি অনুচ্ছেদ 6·1 ও 6·2-র অনুরূপ।

Sec. D

অনুচ্ছেদ 13·10-র অনুসিদ্ধান্ত

অনুচ্ছেদ 13·2, 13·3, 13·4 এর সূত্রগুলিকে যথাক্রমে (I), (II) ও (III) দ্বারা সূচিত করা হইল। অনুচ্ছেদ 13·10-তে দেখানো হইয়াছে যে (III) নং সূত্র হইতে (II) নং সূত্র পাওয়া যায়। এক্ষণে আমরা দেখাইব যে, কোন একটি হইতে অপর দুইটি সূত্র প্রমাণ করা যায়।

(III) নং সূত্রের দ্বারা (I) নং সূত্রের প্রমাণ :

অনু : 13·4-র দ্বিতীয় সূত্র হইতে b-র মান যদি প্রথম সূত্রে বসানো যায়, তাহা হইলে

$$a=(c\cos A+a\cos C)\cos C+c\cos B$$

$$\therefore\quad a(1-\cos^2 C)=c(\cos A\cos C+\cos B)$$

$$=c\{\cos A\cos C-\cos(A+C)\}\qquad[\because A+B+C=\pi]$$

$$=c\sin A\sin C.$$

$$\therefore\quad a\sin^2 C=c\sin A\sin C.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

অনুরূপভাবে, c-র মান প্রথম সূত্রে বসাইলে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

অতএব, $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

(I) নং সূত্রের দ্বারা (II) ও (III) নং সূত্রের প্রমাণ :

(i) মনে করি, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k.$

অতএব, $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C.$

$$\therefore \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{k^2(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)}{k^2.2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2 B+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin B\{\sin B+\sin(C-A)\}}{2\sin B\sin C}$$

$$[\because \ \sin(C+A)=\sin(\pi-B)=\sin B]$$

$$=\frac{\sin B\{\sin(C+A)+\sin(C-A)\}}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2\sin B\sin C\cos A}{2\sin B\sin C}=\cos A.$$

(ii) $b\cos C+c\cos B=k(\sin B\cos C+\sin C\cos B)$

$$=k\sin(B+C)=k\sin A \quad [\because \ A+B+C=\pi]$$

$$=a.$$

(II) নং সূত্র হইতে (I) নং ও (III) নং সূত্রের প্রমাণ :

(i) $\sin^2 A=1-\cos^2 A$

$$=1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

$$=\frac{k}{4b^2c^2} \quad [\text{ধরা হইল}] \quad \therefore \quad \frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{k}{4a^2b^2c^2}.$$

• অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{k}{4a^2b^2c^2}, \quad \text{এবং}, \quad \frac{\sin^2 C}{c^2}=\frac{k}{4a^2b^2c^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\sin^2 A}{a^2}=\frac{\sin^2 B}{b^2}=\frac{\sin^2 C}{c^2}.$$

সুতরাং $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}.$

(ii) অনুচ্ছেদ-এর দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্র যোগ করিলে

$$b^2+c^2=b^2+c^2+2a^2-2ca\cos B-2ab\cos C$$

$$\therefore \quad 2a^2=2ca\cos B+2ab\cos C$$

বা $\quad a=c\cos B+b\cos C.$

BOARD OF SECONDARY EDUCATION, WEST BENGAL

Higher Secondary Examination Papers

1960

1. (*a*) Prove that the radian is a constant angle. Find its value in degrees, minutes etc. [$\pi = \frac{22}{7}$]

(*b*) The angles of a triangle are in Arithmetical Progression and the number of degrees in the least is to the number of radians in the greatest as 60 to π. Find the angles in degrees.

2. (*a*) If A, B, $A+B$ are all acute angles, prove (geometrically) that

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

(*b*) Find the value of

$$\sin^2 60^\circ + \cos^2 150^\circ + \tan^2 120^\circ + \cos 180^\circ - \tan 135^\circ.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$.

(*b*) If $A+B=90^\circ$, prove that

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A - \tan B.$$

4. (*a*) In a triangle ABC, prove that $a = b\cos C + c\cos B$.

(*b*) In a triangle, the angles are to one another as 1 : 2 : 3 ; prove that the corresponding sides are as $1 : \sqrt{3} : 2$.

5. Two vertical pillars, the height of one of which is double that of the other, are at a distance of 150 ft. from each other. At a point between the pillars and on the line joining their feet the angular elevations of the tops of the taller and the shorter pillar are found to be 60° and 30° respectively. Find the heights of the pillars and the position of the point.

6. Draw the graph of $\sin x$ between the values $x = -\pi$ and $x = \pi$ and find, from the graph, the value of $\sin 120^\circ$.

1960 (Compartmental)

1. (*a*) The difference between the two acute angles of a right-angled triangle is $\frac{2}{5}\pi$ radians ; express these angles in degrees.

(*b*) If s is the length of the arc of a circle whose radius is r and θ is the radian measure of the angle at the centre, standing on the arc, prove that $\theta = s/r$.

2. (*a*) If A and B are both acute angles and A is greater than B, prove (geometrically) that

$$\sin (A-B)=\sin A \cos B-\cos A \sin B.$$

(*b*) If $\sin A=\frac{3}{5}$ and $\cos B=\frac{12}{13}$, where A and B are acute angles, find the value of

$$\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A \tan B}.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation

$$\sin^2\theta-2 \cos \theta+\tfrac{1}{4}=0.$$

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\sin A+\sin B+\sin C=4 \cos \tfrac{1}{2}A \cos \tfrac{1}{2}B \cos \tfrac{1}{2}C.$$

4. In a triangle ABC, prove that

(i) $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, (ii) $a \cos \dfrac{B-C}{2}=(b+c) \sin \dfrac{A}{2}$.

5. The upper part of a straight tree broken over by the wind, but not completely separated, makes an angle of 30° with the ground, and the distance from the root to the point where the top of the tree touches the ground is 50 feet. What was the height of the tree?

6. Draw the graph of $\cos x$ between the values of $x=-\pi$ and $x=\pi$ and read off from the graph, the value of cos 150°.

1961

1. (*a*) The radius of a circle is 10 cm.; find the angle, in degrees and minutes, subtended at its centre by an arc 6 cm. in length. [$\pi=\frac{22}{7}$]

(*b*) The angles of a triangle are in Arithmetical Progression. If the number of degrees in the greatest angle is the same as the number of grades in the least, find the angles in degrees.

2. (*a*) If A, B and $A-B$ are positive acute angles, prove geometrically that

$$\sin (A-B)=\sin A \cos B-\cos A \sin B.$$

(*b*) Find the value of

$$\sin 330°+\tan 45°-4 \sin^2 120°+2 \cos^2 135°+\sec^2 180°.$$

3. (*a*) Find the values of θ between 0° and 360° which satisfy the equation

$$\sqrt{3} \sin \theta+\cos \theta=1.$$

(*b*) If $A+B+C=180°$, prove that

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A \tan B \tan C.$$

4. In a triangle ABC, prove that

(*a*) $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$.

(*b*) $a \sin (B-C)+b \sin (C-A)+c \sin (A-B)=0$.

5. On a straight coast there are three objects A, B and C such that $AB = BC = 4$ miles. A steamer approaches B in a line perpendicular to the coast and at a certain point AC is found to subtend an angle of 60°; after sailing in the same direction for ten minutes, AC is found to subtend an angle of 120°; find the rate at which the steamer is going.

6. Draw the graph of $\sin x$ between the values of $x = 0^\circ$ and $x = 360^\circ$ and read off from the graph, the value of $\sin 240^\circ$

1961 (Compartmental)

1. (*a*) Define a radian. Taking $\pi = 3{\cdot}1416$, show that a radian contains 206265 seconds approximately.

(*b*) One angle of a triangle is $\frac{2}{3}x$ grades and another is $\frac{3}{2}x$ degrees, whilst the third is $\frac{\pi x}{75}$ radians; express them all in degrees.

2. (*a*) If A, B and $A - B$ are all positive acute angles, prove geometrically that

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

(*b*) Find the value of

$$\frac{2 \tan^2 30^\circ}{1 - \tan^2 30^\circ} + (\sec^2 45^\circ - \cot^2 45^\circ) - (\cos^2 60^\circ + \sin^2 120^\circ).$$

3. (*a*) Prove that

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$$

(*b*) If $A + B + C = 180^\circ$, prove that

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

4. In a triangle ABC, prove

(*a*) $c = a \cos B + b \cos A$.

(*b*) $(b - c) \cos \dfrac{A}{2} = a \sin \dfrac{B - C}{2}$.

5. Two vertical poles are 120 feet apart and the height of one is double that of the other. From the middle point of the line joining their feet, an observer finds the angular elevations of their tops to be complementary. Find their heights.

6. Draw the graph of $\cos x$ between the values $x = 0^\circ$ and $x = 360^\circ$ and read off from the graph the value of $\cos 300^\circ$.

TABLES OF LOGARITHMS, NATURAL SINES, NATURAL TANGENTS, LOGARITHMIC SINES, LOGARITHMIC TANGENTS ETC.

TABLE I

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743	42	83	125	166	208	248	290	331	373
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555	38	76	114	152	190	227	265	302	340
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059	35	70	105	140	175	209	243	278	313
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301	32	65	97	129	162	193	225	258	290
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319	30	60	90	120	150	180	210	240	270
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789	26	53	79	105	132	158	184	210	237
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285	25	50	74	99	124	149	174	199	223
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646	23	47	70	94	117	141	164	188	211
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885	22	45	67	89	111	134	156	178	201
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015	21	42	64	85	106	127	148	170	191
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044	20	40	61	81	101	121	141	162	182
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984	19	39	58	77	97	116	135	154	174
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840	19	37	56	74	93	111	130	148	167
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620	18	36	53	71	89	107	124	142	160
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330	17	34	51	68	85	102	119	136	153
26	41497	41664	41850	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975	16	33	49	66	82	98	115	131	148
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560	16	32	47	63	79	95	111	126	142
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090	15	30	46	61	76	91	106	122	137
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567	15	29	44	59	74	88	103	118	132

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996	14	29	43	57	72	86	100	114	129
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379	14	28	42	55	69	83	97	110	125
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720	13	27	40	54	67	80	94	107	121
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020	13	26	39	52	65	78	91	104	117
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283	13	25	38	50	63	76	88	101	113
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509	12	24	37	49	61	73	86	98	110
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703	12	24	36	48	60	71	83	95	107
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864	12	23	35	46	58	70	81	93	104
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995	11	23	34	45	57	68	79	90	102
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097	11	22	33	44	55	66	77	88	99
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172	11	21	32	43	54	64	75	86	97
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221	10	21	31	42	52	63	73	84	94
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246	10	20	31	41	51	61	71	82	92
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246	10	20	30	40	50	60	70	80	90
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225	10	20	29	39	49	59	68	78	88
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181	10	19	29	38	48	57	67	76	86
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117	9	19	28	37	47	56	65	75	84
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034	9	18	27	37	46	55	64	73	82
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931	9	18	27	36	45	53	62	71	80
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810	9	18	26	35	44	53	61	70	79
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672	9	17	26	34	43	52	60	69	77
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517	8	17	25	34	42	51	59	67	76
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346	8	17	25	33	42	50	58	66	75
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159	8	16	24	32	41	49	57	65	73
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957	8	16	24	32	40	48	56	64	72

LOGARITHMS OF NUMBERS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741	8	16	23	31	39	47	55	62	70
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511	8	15	23	31	39	46	54	62	69
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268	8	15	23	30	38	45	53	60	68
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012	7	15	22	30	37	45	52	59	67
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743	7	15	22	29	37	44	51	58	66
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462	7	14	22	29	36	43	50	57	65
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169	7	14	21	28	35	42	49	56	64
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865	7	14	21	28	35	42	49	56	63
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550	7	14	21	27	34	41	48	55	62
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224	7	13	20	27	34	40	47	54	60
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889	7	13	20	26	33	40	46	53	59
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543	7	13	20	26	33	39	46	52	59
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187	6	13	19	26	32	39	45	52	58
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822	6	13	19	25	32	38	44	50	57
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448	6	13	19	25	31	37	44	50	56
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065	6	12	18	25	31	37	43	49	55
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673	6	12	18	24	30	36	42	49	55
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273	6	12	18	24	30	36	42	48	54
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864	6	12	18	24	30	35	41	47	53
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448	6	12	18	23	29	35	41	47	52

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024	6	12	17	23	29	35	40	46	52
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593	6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154	6	11	17	22	28	34	39	45	50
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708	6	11	17	22	28	33	39	44	50
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255	5	11	16	22	27	33	38	44	49
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795	5	11	16	22	27	32	38	43	49
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328	5	11	16	21	27	32	37	43	48
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855	5	11	16	21	26	32	37	42	47
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376	5	10	16	21	26	31	36	42	47
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891	5	10	15	21	26	31	36	41	46
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399	5	10	15	20	25	30	36	41	46
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902	5	10	15	20	25	30	35	40	45
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399	5	10	15	20	25	30	35	40	45
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890	5	10	15	20	25	29	34	39	44
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376	5	10	15	19	24	29	34	39	44
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856	5	10	14	19	24	29	34	38	43
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332	5	9	14	19	24	29	33	38	43
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802	5	9	14	19	24	28	33	38	42
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267	5	9	14	19	23	28	33	37	42
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727	5	9	14	18	23	28	32	37	41
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182	5	9	14	18	23	27	32	36	41
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632	5	9	14	18	23	27	32	36	41
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078	4	9	13	18	22	27	31	36	40
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520	4	9	13	18	22	26	31	35	40
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957	4	9	13	17	22	26	30	35	39

TABLE II
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76414	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°									
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES

TABLE III

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	775
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	53	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°									
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																

The differences change very rapidly here so that they cannot be tabulated.

The cotangent of a small angle of x' or the tangent of $90° - x'$ is very nearly equal to 3437·7 divided by x.

NATURAL COTANGENTS

TABLE IV

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°									
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible. For small angles of x minutes $\log \sin x'$ or $\log \cos (90° - x') = \log x + \bar{4}\cdot46373$.

20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	20
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	19
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	18
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	17
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	17
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	16
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	15
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	15
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	14
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	14
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	13
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	13
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	12
42°	·82551	·82691	·82830	·82963	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	12
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	12
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	11
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	9·84949	9·85074	9 85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																	
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE V

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	$-\infty$	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43306	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

(Mean Differences, for 0°–6°:) Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.
For small angles of x minutes log tan x' or log cot $(90° - x')$
$= \log x + \bar{4}·46373$.

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	**44°**	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	**43°**	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	**42°**	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	**41°**	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	**40°**	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	**39°**	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	**38°**	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	**37°**	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	**36°**	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	**35°**	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	**34°**	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	**33°**	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	**32°**	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	**31°**	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	**30°**	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	**29°**	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	**28°**	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	**27°**	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	**26°**	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	**25°**	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°	Differences vary so rapidly here that tabulation is impossible.								
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

SOME USEFUL CONSTANTS

One radian $= 57^\circ\ 17'\ 45''$ nearly $= 206265''$;

log 206265 = 5·3144255.

$\pi = 3{\cdot}14159265\ldots$ $\qquad \dfrac{1}{\pi} = 0{\cdot}31830989.$

$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142135\ldots$ $\qquad \sqrt{3} = 1{\cdot}7320508\ldots$

$\sqrt{5} = 2{\cdot}2360679\ldots$ $\qquad \sqrt{6} = 2{\cdot}4494897\ldots$

$\sqrt{7} = 2{\cdot}6457513\ldots$ $\qquad \sqrt{8} = 2{\cdot}8284271\ldots$

$\sqrt{10} = 3{\cdot}1622776\ldots$

SOME USEFUL LOGARITHMS

log 2 = ·30103 $\qquad$ log 3 = ·47712

log 5 = ·69897 $\qquad$ log 7 = ·84510

উচ্চ-মাধ্যমিক স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

(একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশ)

প্রেসিডেন্সী কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস, এম. এস্-সি.

ও

স্কটিশ চার্চ কলেজের ভূতপূর্ব গণিতাধ্যাপক

শ্রীভোলানাথ মুখোপাধ্যায়, এম. এ.,

প্রেমচাঁদ রায়চাঁদ স্কলার

কর্তৃক প্রণীত

ইউ. এন্. ধর অ্যাণ্ড সন্স প্রাঃ লিঃ

১৫, বঙ্কিম চ্যাটার্জী স্ট্রীট, কলিকাতা ১২

নিবেদন

ইংরাজী ভাষাতে লেখা আমাদের Elements of Co-ordinate and Solid Geometry বইখানি কতকগুলি বৈশিষ্ট্যের জন্য বহু অধ্যাপকের সমাদর ও সহানুভূতি লাভ করিয়াছে। সেজন্য উচ্চ-মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রছাত্রীদের সুবিধার জন্য বাংলা ভাষায় ঐ সব শ্রেণীর পাঠ্য-তালিকা-অনুযায়ী সামতলিক জ্যামিতি অংশ যোগ করিয়া একখানি উচ্চ-মাধ্যমিক জ্যামিতির বই—ঘন ও স্থানাঙ্ক জ্যামিতিসহ আমরা বাহির করিলাম। ইহাতে উচ্চ-মাধ্যমিক পরীক্ষার দ্বিতীয় পত্রের পাঠ্য-তালিকা সম্পূর্ণ হইল। পুস্তকখানি ছাত্রছাত্রীগণের সুবিধার্থে তাহাদের প্রয়োজনমত **নবম, দশম** ও **একাদশ** শ্রেণীর পাঠ্যক্রম-অনুসারে পৃথক পৃথক আকারে (class-wise) অথবা **একত্রে** পাওয়া যাইবে। বর্তমান গ্রন্থে কেবল একাদশ শ্রেণীর পাঠ্যাংশ সন্নিবদ্ধ হইয়াছে। ইংরাজী ভাষায় লেখা বইখানির মত, এই বইখানিও শিক্ষকমহাশয় ও ছাত্র-ছাত্রীদের নিকট সমাদর লাভ করিলে আমরা আমাদের শ্রম সার্থক বিবেচনা করিব। ইতি—

ভূপেন্দ্রচন্দ্র দাস
ভোলানাথ মুখোপাধ্যায়

Higher Secondary Syllabus of Elective Mathematics :

CO-ORDINATE GEOMETRY

(Course for Class XI)

Co-ordinate Geometry :

Circle, chords, tangents ; Normals and elementary properties connected with them ; Parabola, Ellipse, Hyperbola referred to their principal axes ; Analytical treatment of these curves in respect of (1) the focus and directrix properties, (2) tangents and normals and elementary properties connected with them, (3) centre and diameter.

[*Note*—Discussion should always be restricted to rectangular cartesian co-ordinates]

[*Chapters IV—VIII. Pages 197 to the end*]

একাদশ শ্রেণীর সূচীপত্র

IMPORTANT FORMULÆ AND RESULTS

Solid Geometry (Mensuration)

1. *Rectangular parallelopiped* (or cuboid).

If a, b, c be its length, breadth and height

(i) Area of the surface $=2(bc+ca+ab)$.

(ii) Volume $=abc$.

(iii) Surface area of a cube of side $a=6a^2$.

(iv) Volume $=a^3$.

2. *Right Pyramid on any regular base*

(i) Slant surface $=\frac{1}{2}$(perimeter of base) × slant height.

(ii) Volume $=\frac{1}{3}$(area of base) × height.

3. *Tetrahedron.*

Volume $=\frac{1}{3}$(area of base) × height.

4. *Right Prism.*

(i) Lateral surface $=$(perimeter of base) × height.

(ii) Volume $=$(area of base) × height.

5. *Right circular cylinder.*

If r is the radius of the base and h the height of the cylinder,

(i) Area of the curved surface

$=$(circumference of base) × height

$=2\pi rh$.

(ii) Area of the *whole surface*

$=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi r(h+r)$.

(iii) Volume $=$(area of base) × height $=\pi r^2 h$.

6. *Right circular cone.*

If r is the radius of the base, h the height, l the slant side and α the semi-vertical angle of the cone.

(i) Area of curved surface

$$= \tfrac{1}{2}(\text{circumference of base}) \times \text{slant side}$$
$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l$$
$$= \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = \pi r^2 \operatorname{cosec} \alpha.$$

(ii) Area of the *whole surface* $= \pi r(l + r)$.

(iii) Volume $= \tfrac{1}{3}(\text{area of base}) \times \text{height}$

$$= \tfrac{1}{3}\pi r^2 h = \tfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^2 \alpha.$$

7. *Sphere.*

If r be the radius of the sphere,

(i) Area of curved surface $= 4\pi r^2$.

(ii) Volume $= \tfrac{4}{3}\pi r^3$.

Co-ordinate Geometry

1. Distance $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Distance $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Point dividing the line joining two given points in a given ratio :

$$x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}.$$

Middle point $\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)$.

3. Area of a triangle with given vertices

$$\tfrac{1}{2}\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\}.$$

4. General equation of a straight line

$$ax + by + c = 0 \ (a \text{ and } b \text{ both} \neq 0).$$

Every first degree equation in x, y represents a straight line.

5. Transfer of the origin (directions of axes remaining unchanged) from $(0, 0)$ to (α, β)

$$x = X + \alpha, \ y = Y + \beta.$$

6. Straight line parallel to the x-axis : $y = b$.

Straight line parallel to the y-axis : $x = a$.

7. Equations of straight lines in standard forms :

(i) Intercept form : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

(ii) '*m*' form : $y=mx+c.$

(iii) Form through a given point :

$$y-y_1=m(x-x_1), \quad \text{or} \quad \frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}.$$

(iv) Normal (or perpendicular) form :

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$$

(v) Two points form : $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$

8. Point of Intersection of the two lines

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0:$$

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

9. Condition for concurrence of the three given lines $a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad a_3x+b_3y+c_3=0$: $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$

10. Condition for collinearity of the three given points $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, is

$$x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$$

11. Angle between two given lines :

(i) When the lines are $y=m_1x+c_1,\ y=m_2x+c_2$

$$\tan\phi=\frac{m_1\sim m_2}{1+m_1m_2}.$$

(ii) When the lines are

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2=0$$

$$\tan\phi=\frac{a_1b_2\sim a_2b_1}{a_1a_2+b_1b_2}.$$

12. Conditions for

(*a*) parallel lines, (i) $m_1=m_2$, (ii) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}.$

(*b*) perpendicular lines, (i) $m_1 m_2 = -1$,

(ii) $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

13. Length of the perpendicular from the point (x_1, y_1) upon the line $ax + by + c = 0$ is

$$\pm \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

14. Equations of the bisectors of the angle between the lines $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$, $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ are

$$\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

15. Equation of the circle

(i) Standard form : $x^2 + y^2 = a^2$

centre : (0, 0) ; radius a.

(ii) general form : $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

centre : $(-g, -f)$, radius $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

16. Circle with the given points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as extremities of a diameter

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

17. Fquation of the tangent to the circle at (x_1, y_1)

(i) for standard form : $xx_1 + yy_1 = a^2$,

(ii) for general form :

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

18. Equation of the normal to the circle at (x_1, y_1)

(i) for standard form : $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1}$.

(ii) for general form : $x(y_1 + f) - y(x_1 + g) = fx_1 - gy_1$.

19. Length of the chord of the circle $x^2 + y^2 = a^2$ intercepted by the line $y = mx + c$ is

$$2 \frac{\sqrt{a^2(1 + m^2) - c^2}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

20. Condition of tangency: condition that the line $y = mx + c$ may touch the circle $x^2 + y^2 = a^2$ is

$$c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$$

$y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$ is a tangent to the circle $x^2 + y^2 = a^2$ for all values of m, and in that case the point contact is

$$-\frac{am}{\sqrt{1 + m^2}}, \quad \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

21. Length of the tangent from an external point (x_1, y_1) to the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ is

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}.$$

22. Standard forms of the equations of conics.

(*a*) Parabola

(i) $y^2 = 4a(x - a)$ (with axis and directrix as axes of co-ordinates).

(ii) $y^2 = 4ax$ (Standard form),
(with the vertex as origin and the axis and the tangent at the vertex as axes of co-ordinates).

(*b*) Ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Standard form).
(with centre as origin, and major and minor axes as axes of co-ordinates).

(*c*) Hyperbola

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (standard form)
(with centre as origin and transverse and conjugate axes as axes of co-ordinates).

23. Parabola :

(i) Standard form $y^2 = 4ax$.

(ii) Latus rectum $= 4a$; focus is $(a, 0)$; extremities of the latus rectum are $(a, \pm 2a)$; directrix is $x = -a$.

(iii) Equation of the tangent at (x_1, y_1) is
$yy_1 = 2a(x + x_1)$.

(iv) Normal at (x_1, y_1) is $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$.

(v) Length of the chord intercepted by the straight line
$y = mx + c$ is $\frac{4}{m^2}\sqrt{a(a - mc)(1 + m^2)}$.

(vi) Condition that $y = mx + c$ may touch the
parabola is $c = \frac{a}{m}$ $(m \neq 0)$.

The line $y = mx + \frac{a}{m}$ is a tangent to the parabola for all values of m (except zero),
the point of contact being $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

(vii) Parametric representation : $x = at^2$, $y = 2at$.

(viii) Equation of the diameter : $y = \frac{2a}{m}$.

24. Ellipse

(i) Standard form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(ii) Latus rectum $= 2a(1 - e^2) = 2\frac{b^2}{a}$.

(iii) Eccentricity : $b^2 = a^2(1 - e^2)$ or $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

(iv) Focal distances of $P(x_1, y_1)$:
$SP = a - ex_1$, $S'P = a + ex_1$; $SP + S'P = 2a$.

(v) Tangent at (x_1, y_1) : $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

(vi) Normal at (x_1, y_1) : $\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$.

(vii) Length of the chord intercepted by the line

$y = mx + c$ on the ellipse

$$= \frac{2ab\sqrt{1+m^2}\sqrt{a^2m^2+b^2-c^2}}{a^2m^2+b^2}.$$

(viii) Condition of tangency :

The line $y = mx + c$ is a tangent to the ellipse if

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

The line $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ is a tangent to the ellipse for all values of m, and the point of contact is

$$-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \quad \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

(ix) Auxiliary circle : $x^2 + y^2 = a^2$.

(x) Parametric representation : $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$.

(xi) Diameter $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$.

(xii) Director circle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

25. Hyperbola

(i) Standard equation : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

(ii) Latus rectum : $2a(e^2-1) = 2\dfrac{b^2}{a}$.

(iii) Eccentricity : $b^2 = a^2(e^2-1)$ or $e^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2}$.

For rectangular (or equilateral) hyperbola

$a = b$; $e = \sqrt{2}$.

(iv) Focal distances of $P(x_1, y_1)$

$SP = ex_1 - a$, $S'P = ex_1 + a$

$S'P - SP = 2a$.

(v) Equation of the tangent at (x_1, y_1)

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

(vi) Equation of the normal at (x_1, y_1) is

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{-\frac{y_1}{b^2}}.$$

(vii) Length of the chord of the hyperbola intercepted by $y = mx + c$ is

$$\frac{2ab\sqrt{1+m^2}\sqrt{c^2 - a^2m^2 + b^2}}{a^2m^2 - b^2}.$$

(viii) Condition of tangency :

The line $y = mx + c$ will be a tangent to the hyperbola if $c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

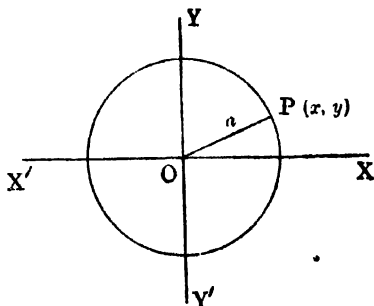
The line $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ is a tangent to the hyperbola for all values of m, the point of contact being $\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)$

(ix) Equation of the diameter is $y = \frac{b^2}{a^2m}x$.

(x) Equation of the asymptotes : $y = \pm\frac{b}{a}x$.

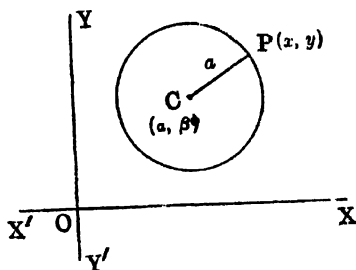
চতুর্থ অধ্যায়

বৃত্ত (Circle)

4·1. ও কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত।

মূলবিন্দু O তে কেন্দ্রবিশিষ্ট এক বৃত্তের ব্যাসার্ধ, মনে কর, a. বৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক যদি (x, y) হয়, তবে $OP = a$.

$$\therefore \quad OP^2 = a^2 ; \qquad \therefore \quad \mathbf{x^2 + y^2 = a^2}.$$

বৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) দ্বারা এই সম্পর্ক সিদ্ধ হয় বলিয়া ইহাই বৃত্তের সমীকরণ সূচিত করে।

4·2. যে-কোন বিন্দুতে কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত।

মনে কর, $C(\alpha, \beta)$ বৃত্তের কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ। বৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক যদি (x, y) হয়, তবে $CP = a$ বা $CP^2 = a^2$,

$$\therefore \quad (\mathbf{x}-\alpha)^2+(\mathbf{y}-\beta)^2=\mathbf{a}^2.$$

বৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই সম্পর্ক সিদ্ধ করে বলিয়া ইহাই বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। উপরিলিখিত বিষয় হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, যে-কোন বিন্দুতে (ধর, α, β) কেন্দ্র এবং যে-কোন দৈর্ঘ্য (ধর, a) ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণের আকার

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-a^2)=0.$$

অর্থাৎ, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ এই আকারের, যেখানে g, f, c ধ্রুবক।

অতএব, ইহাই বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ আকার [§ 4·3 এবং উহার দ্রষ্টব্য অংশ দেখ]।

মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রে g এবং f উভয়েই 0.

4·3. g, f, c ধ্রুবকগুলির যে-কোন মান হইলে $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$ সমীকরণটি সতত একটি বৃত্ত নির্দেশ করে, এবং ইহার কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয়।

প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায়,

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c,$$

বা, $$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c,$$

বা, $$\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2.$$

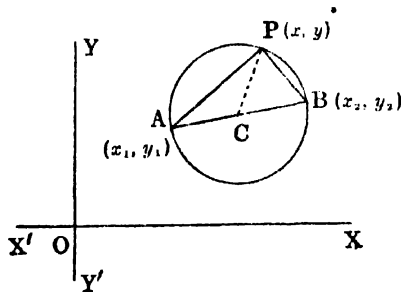
ইহা হইতে প্রতীয়মান যে, নির্দিষ্ট বিন্দু $(-g, -f)$ হইতে চলন্ত বিন্দু (x, y) এর দূরত্ব ধ্রুবক $\sqrt{g^2+f^2-c}$ এর সমান।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ-সূচিত সঞ্চারপথটি $(-g, -f)$ বিন্দুতে কেন্দ্র ও $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। সমীকরণটিকে একটি ধ্রুবক-সংখ্যা a দ্বারা গুণ করিয়া এই আকারে লেখা যায়

$$ax^2+ay^2+2g'x+2f'y+c'=0 \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

এই সমীকরণও একটি বৃত্ত সূচিত করে, কিন্তু $(-g', -f')$ বিন্দু ইহার কেন্দ্র নহে, অথবা $\sqrt{g'^2+f'^2-c'}$ ও ইহার ব্যাসার্ধ নহে। প্রকৃতপক্ষে, একটি দ্বিঘাত সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর সহগ যদি সমান হয় এবং xy-সংবলিত কোন পদ না থাকে, তবে লম্ব-স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে। উপরের (i) সমীকরণটি বৃত্ত-নির্দেশক একটি সাধারণ সমীকরণ। এই বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ স্থির করিতে হইলে x^2 ও y^2 এর সাধারণ সহগ a দ্বারা সমীকরণটিকে ভাগ করিয়া $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ আকারে পরিণত করিতে হইবে। তাহা হইলে $(-g, -f)$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য হইবে।

4·4. (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দু দুইটি একটি বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হইলে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়।

$A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ বৃত্তের ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হইলে AB-র মধ্যবিন্দু $\{\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(y_1+y_2)\}$ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে এবং ব্যাসার্ধ $=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

$\therefore$ এই বৃত্তের সমীকরণ

$$\{x-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\}^2+\{y-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\}^2$$
$$=\tfrac{1}{4}\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\} \quad \cdots \quad (1)$$

বিকল্প পদ্ধতি।

AB, বৃত্তের ব্যাস এবং P বৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু (x, y) হইলে PA এবং PB পরস্পর লম্ব।

এক্ষণে, PA ও PB রেখাদ্বয়ের 'm' যথাক্রমে $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ এবং $\frac{y-y_2}{x-x_2}$.

[§ 3·1(E) দেখ]

∴ PA এবং PB পরস্পর সমকোণে নত বলিয়া

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1,$$

বা $$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0 \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এই সমীকরণটি বৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ বলিয়া ইহাই বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য। সমীকরণের উপরিলিখিত (i) ও (ii) আকার যে অভিন্ন, তাহা সরল করিলেই বুঝা যাইবে।

4·5. (x_1, y_1), (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ।

মনে কর, বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

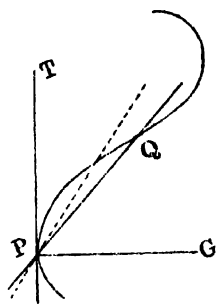
বৃত্তটি প্রদত্ত তিনটি বিন্দু দিয়া গমন করে বলিয়া

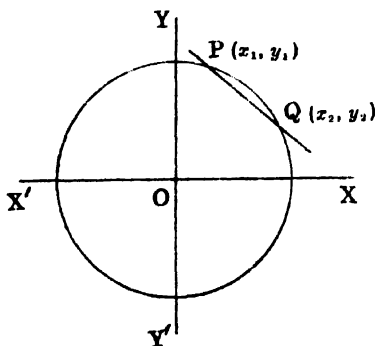
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$
$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0$$
$$x_3^2+y_3^2+2gx_3+2fy_3+c=0$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) র মান দেওয়া থাকিলে তিনটি অজ্ঞাত-রাশি g, f, c সংবলিত এই তিনটি একঘাত সহ-সমীকরণ হইতে আমরা g, f, c র নির্দিষ্ট মান পাইতে পারি।

g, f, c র এই লব্ধ মান (i) সমীকরণে বসাইলে আমরা বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ পাই এবং ইহার কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ও পাওয়া যায়।

4·6. স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা

কোন বক্ররেখার উপর দুইটি সন্নিহিত বিন্দু P ও Q এর সংযোজক সরলরেখাকে P কেন্দ্র করিয়া যদি এমন ভাবে ঘোরানো যায় যে, বক্র-রেখার সহিত PQ এর অপর ছেদবিন্দু Q ক্রমশঃ P-র নিকটবর্তী হইতে হইতে অবশেষে P বিন্দুর সহিত একেবারে মিলিয়া যায়, তবে PQ-র এই শেষ অবস্থান PT কে P বিন্দুতে বক্ররেখাটির **স্পর্শক** (*tangent*) বলা হয়।

স্পর্শবিন্দু P-র মধ্য দিয়া স্পর্শক PT-র লম্ব-রেখা PG কে P বিন্দুতে বক্ররেখাটীর **অভিলম্ব** (*normal*) বলে।

4·7. (A) $x^2+y^2=a^2$ এবং (B) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তদ্বয়ের উপর নির্দিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

(A) মনে কর, $x^2+y^2=a^2$...(i) বৃত্তের উপর দুইটি সন্নিহিত বিন্দু P ও Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2).

তাহা হইলে PQ জ্যা-র সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1). \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এক্ষণে, উভয় বিন্দু P, Q বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

∴ বিয়োগ করিয়া $(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0$;

$$\therefore \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}.$$

∴ সমীকরণ (ii) এই আকারে লেখা যায়

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1). \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

এক্ষণে, Q বিন্দুকে ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকট সরাইয়া আনিলে শেষপর্যন্ত Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে এবং Q-র স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) P-র স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এর সহিত এক হইয়া যাইবে। এই শেষ অবস্থানে PQ জ্যা P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং (v) হইতে ইহার সমীকরণ তখন হইবে

$$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1),$$

বা $\quad x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) = 0,$

অর্থাৎ, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = a^2$ [(iii) এর সাহায্যে]

∴ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের $(x_1\ y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = a^2.}$$

(B) মনে কর, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ··· (i) বৃত্তের উপর দুইটি সন্নিহিত বিন্দু P, Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2).

PQ জ্যা-র সমীকরণ $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. ··· (ii)

P, Q বিন্দুদ্বয় বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া

$$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0. \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

$$x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0. \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

∴ বিয়োগ করিয়া,

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0,$$

বা, $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2g) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2f) = 0,$

বা, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1 + 2g}{y_2 + y_1 + 2f}.$

$\therefore$ PQ জ্যা-র সমীকরণ (ii) এইভাবে লেখা যায়

$$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1 + 2g}{y_2 + y_1 + 2f}(x - x_1). \qquad \cdots \quad (v)$$

এক্ষণে, Q বিন্দু ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকট সরাইয়া আনিলে শেষপর্যন্ত Q বিন্দু P বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে এবং Q-র স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) P-র স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এর সহিত এক হইয়া যাইবে। তখন PQ জ্যা P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং (v) হইতে ইহার সমীকরণ তখন হইবে

$$y - y_1 = -\frac{2(x_1 + g)}{2(y_1 + f)}(x - x_1),$$

বা, $(x_1 + g)(x - x_1) + (y_1 + f)(y - y_1) = 0,$

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1.$

উভয় পক্ষে $gx_1 + f_1y + c$ যোগ করিয়া

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0. \qquad [\text{(iii) হইতে}]$$

$\therefore$ (i) সমীকরণ নির্দেশিত বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.}$$

4·8. (A) $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ এবং (B) $\mathbf{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ বৃত্ত দ্বয়ের $\mathbf{(x_1, y_1)}$ বিন্দুতে অভিলম্বের (normal) সমীকরণ।

(A) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক $xx_1 + yy_1 = a^2$, বা $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$. এই রেখার '$m$' $= -\frac{x_1}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুগামী অভিলম্ব এই বিন্দুগামী স্পর্শক $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$ এর লম্ব হওয়ায় ইহার সমীকরণ $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$,

বা, $\frac{x - x_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{y_1}$,

বা, $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$.

এই রেখা স্পষ্টই বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) বিন্দুগামী।

(B) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0,$$

অর্থাৎ, $x(x_1 + g) + y(y_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0.$

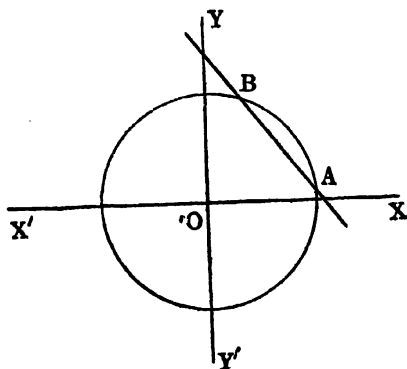
ইহার 'm' $= -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}$.

(x_1, y_1) বিন্দুগামী অভিলম্ব ঐ বিন্দুগামী স্পর্শকের লম্ব হওয়ায় ইহার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1).$$

বা, $x(y_1 + f) - y(x_1 + g) = fx_1 - gy_1$.

দ্রষ্টব্য। এই রেখা স্পষ্টতঃই বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ বিন্দুগামী। অতএব, বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব বৃত্তের কেন্দ্রগামী। অর্থাৎ, বৃত্তের যে-কোন বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ ঐ বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর লম্ব।

4·9. $y = mx + c$ রেখা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে ছেদ করিলে ।জ্যা-র দৈর্ঘ্য।

সরলরেখা কর্তৃক বৃত্তের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক বৃত্ত ও সরলরেখার উভয় সমীকরণ সিদ্ধ করে। সুতরাং, এই দুই সমীকরণ হইতে y অপসারণ করিলে ছেদবিন্দুর ভুজ, নিম্নের সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে।

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2,$$

বা, $$x^2(1 + m^2) + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0. \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইহা x এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া x এর মাত্র দুইটি মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং, বৃত্তের সহিত সরলরেখাটি মাত্র দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে।

মনে কর, A, B ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2). তাহা হইলে, x_1 এবং x_2 (i) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2} \text{ এবং } x_1x_2 = \frac{c^2-a^2}{1+m^2}.$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2} - \frac{4(c^2 - a^2)}{1+m^2}$$

$$= \frac{4\{m^2c^2 - (c^2 - a^2)(1 + m^2)\}}{(1+m^2)^2}$$

$$= \frac{4\{a^2(1+m^2) - c^2\}}{(1+m^2)^2}$$

আবার, $$y_1 = mx_1 + c \text{ এবং } y_2 = mx_2 + c.$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

AB জ্যা-র দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + m^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{4\{a^2(1+m^2) - c^2\}}{1+m^2}} = \frac{2\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}}{\sqrt{1+m^2}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। কোন রেখা বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত।

কোন রেখা কর্তৃক বৃত্তের ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য যদি 0 হয়, তবে রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। সুতরাং, $y = mx + c$ রেখা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হওয়ার শর্ত $c^2 = a^2(1 + m^2)$,

অর্থাৎ, $$\mathbf{c = \pm a\sqrt{1 + m^2}.}$$

স্পর্শক হওয়ার শর্ত নির্ণয়ের **বিকল্প পদ্ধতি।**

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে রেখাটির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের সমান।

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) হইতে $mx-y+c=0$ রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য $=a$,

$$\text{বা,}\quad \frac{c}{\pm\sqrt{1+m^2}}=a. \quad \therefore\ c=\pm a\sqrt{1+m^2}.$$

দ্রষ্টব্য। নির্দিষ্ট একটি সরলরেখা $y=mx+c$ এর সহিত সমান্তরাল দুইটি রেখা বৃত্তটির স্পর্শক হইবে, যথা $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$.

4·10. $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ রেখা সর্বদাই $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক তাহার প্রমাণ, এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

(x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক $xx_1+yy_1=a^2$,

$$\text{বা,}\quad xx_1+yy_1-a^2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ বা, $mx-y+a\sqrt{1+m^2}=0$ ... (ii) রেখাটি যদি (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হয় তবে (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইবে। সুতরাং, সহগগুলির অনুপাত সমান হইবে।

$$\therefore\ \frac{x_1}{m}=\frac{y_1}{-1}=\frac{-a^2}{a\sqrt{1+m^2}}=\frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$\therefore\ x_1=-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}},\ y_1=\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}.$$

সুতরাং, যদি (x_1, y_1) বিন্দুটি প্রকৃতপক্ষে বৃত্তের উপর অবস্থিত হয় তবে (ii) সমীকরণ নির্দেশিত রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

$$\text{সেক্ষেত্রে}\quad \left(-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)^2=a^2 \text{ হইতে হইবে।}$$

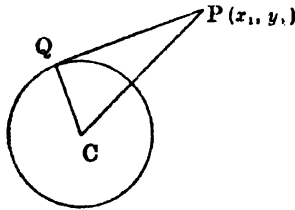
কিন্তু স্পষ্টতঃই বাম পক্ষ দক্ষিণ পক্ষের সমান।

অতএব, m এর মান যাহাই হউক না কেন $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$ রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\mathbf{x_1=-\frac{am}{\sqrt{1+m^2}},\ y_1=\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}}.$$

দ্রষ্টব্য। অনুরূপভাবে, $y=mx-a\sqrt{1+m^2}$ রেখাটিও $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

4·11. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু (x_1, y_1) হইতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

O

মনে কর, P বিন্দু (x_1, y_1) হইতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক PQ. বৃত্তের কেন্দ্র C র স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $CQ=\sqrt{g^2+f^2-c}$.

পূর্বে প্রমাণ করা হইয়াছে CQ, PQ এর উপর লম্ব। [§ 4·8 দ্রষ্টব্য দেখ]

$$\therefore \quad PQ^2 = CP^2 - CQ^2$$
$$= (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2 - (g^2+f^2-c)$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c.$$
$$\therefore \quad PQ = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $\sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}$.

দ্রষ্টব্য। $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, অথবা $x^2+y^2-a^2=0$ বৃত্তের সমীকরণের বাম পক্ষে যদি কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) বসানো যায়, তবে ঐ বিন্দু হইতে সংশ্লিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ আমরা পাই। ইহা যদি ধনাত্মক হয়, তবে বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত এবং স্পর্শকের দৈর্ঘ্য বাস্তব হইবে। কিন্তু ইহা যদি ঋণাত্মক হয়, তবে স্পর্শকের দৈর্ঘ্য কাল্পনিক হইবে, এবং বিন্দুটি বৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হইবে।

বৃত্তের সমীকরণ যদি $ax^2+ay^2+2g'x+2f'y+c'=0$ হয়, তবে সমীকরণকে a দ্বারা ভাগ করিয়া $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ আকারে পরিণত করিতে হইবে। স্পর্শকের দৈর্ঘ্যের বর্গ পাইতে হইলে এই শেষোক্ত সমীকরণের বাম পক্ষে (x, y) এর পরিবর্তে (x_1, y_1) বসাইতে হইবে। [এই সম্পর্কে § 4·3 দ্রষ্টব্য দেখ]

4·12. উদাহরণমালা।

1. *Find the equation to the circle passing through the points* $(2, -3)$ *and* $(-3, -4)$ *and having its centre on the line* $7x+2y+6=0$.

মনে কর, বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β). প্রদত্ত $(2, -3)$ ও $(-3, -4)$ বিন্দু দুইটি বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

$\therefore \quad (\alpha-2)^2+(\beta+3)^2=(\alpha+3)^2+(\beta+4)^2,$

বা, $\quad 10\alpha+2\beta+12=0$ অর্থাৎ, $5\alpha+\beta+6=0 \qquad \cdots \quad$ (i)

আবার, কেন্দ্র, প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত বলিয়া

$$7\alpha+2\beta+6=0 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) সমীকরণ সমাধান করিয়া $\alpha=-2$, $\beta=4$. কেন্দ্র $(-2, 4)$ হইতে $(2, -3)$ বিন্দুর দূরত্বই বৃত্তের ব্যাসার্ধ r.

$\therefore \quad r^2=(2+2)^2+(-3-4)^2=65.$

$\therefore$ বৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$,

বা, $\quad (x+2)^2+(y-4)^2=65,$

অর্থাৎ $x^2+y^2+4x-8y-45=0.$

2. *Find the length of the chord intercepted by the straight line* $3x-4y+5=0$ *of the circle passing through the points* $(1, 2)$, $(3, -4)$ *and* $(5, -6)$.

মনে কর, $(1, 2)$, $(3, -4)$ এবং $(5, -6)$ তিনটি বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad$ (i)

তাহা হইলে সমীকরণে স্থানাঙ্কগুলির মান বসাইয়া

$$5+2g+4f+c=0$$
$$25+6g-8f+c=0$$
এবং $$61+10g-12f+c=0.$$

এই সমীকরণগুলি সমাধান করিলে $g=-11, f=-2, c=25.$

$\therefore$ (i) বৃত্তটি $x^2+y^2-22x-4y+25=0$ ... (ii)

প্রদত্ত রেখাটি $3x-4y+5=0.$ ... ... (iii)

(ii) বৃত্তের এবং (iii) সরলরেখার ছেদবিন্দুর ক্ষেত্রে উভয় সমীকরণ হইতে y অপসারণ করিলে ছেদবিন্দুর ভুজ নিম্ন-সমীকরণের বীজ হইবে

$$x^2+\left(\frac{3x+5}{4}\right)^2-22x-(3x+5)+25=0,$$

বা, $5x^2-74x+69=0.$ ... ... (iv)

(ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক যদি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হয়, তবে x_1 ও x_2 (iv) সমীকরণের বীজ হইবে।

$\therefore \quad x_1+x_2=\frac{74}{5}, \; x_1x_2=\frac{69}{5}.$

$\therefore \quad (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(\frac{74}{5})^2-4.\frac{69}{5}=\frac{4096}{25}.$

উভয় বিন্দু (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2), (iii) এর উপর অবস্থিত বলিয়া

$$3x_1-4y_1+5=0, \; 3x_2-4y_2+5=0,$$

$\therefore \quad 3(x_1-x_2)-4(y_1-y_2)=0, \;\therefore\; (y_1-y_2)^2=\frac{9}{16}(x_1-x_2)^2.$

$\therefore$ l ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য হইলে

$$l^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(1+\tfrac{9}{16})(x_1-x_2)^2$$
$$=\tfrac{25}{16}\times\tfrac{4096}{25}=256.$$
$$=16.$$

বিকল্প পদ্ধতি।

(ii) বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (11, 2) এবং ইহার ব্যাসার্ধ

$$r=\sqrt{11^2+2^2-25}=10 \quad [\text{§ 4·3 দেখ}]$$

এই কেন্দ্রবিন্দু হইতে (iii) রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$p=\frac{3.11-4.2+5}{\sqrt{3^2+4^2}}=6.$$

এক্ষণে (iii) রেখা বরাবর জ্যা যদি AB হয় এবং কেন্দ্র হইতে AB-র উপর লম্ব যদি CN হয়, তবে N, AB-র মধ্যবিন্দু। আবার $AN^2=CA^2-CN^2.$

$\therefore$ ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য $=AB=2AN=2\sqrt{r^2-p^2}=2\sqrt{100-36}=16.$

৪. *Show that the straight line $4x+3y-31=0$ touches the circle $x^2+y^2-6x+4y=12$, and find the point of contact.*

প্রদত্ত সরলরেখা $4x+3y-31=0$, ... (i)

যদি $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ ... (ii)

বৃত্তকে স্পর্শ করে, মনে কর, সেই স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

আবার, (ii) বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1+yy_1-3(x+x_1)+2(y+y_1)-12=0$$

বা, $(x_1-3)x+(y_1+2)y-(3x_1-2y_1+12)=0.$

এই শেষোক্ত সমীকরণটি (i) সমীকরণ হইতে অভিন্ন হইবে।

$\therefore$ অনুরূপ রাশির সহগগুলির অনুপাত সমান হইবে।

$$\therefore \frac{x_1-3}{4}=\frac{y_1+2}{3}=\frac{3x_1-2y_1+12}{31}.$$

এবং ইহাদের প্রত্যেকটি

$$=\frac{(3x_1-2y_1+12)-3(x_1-3)+2(y_1+2)}{31-3.4+2.3}=1.$$

$\therefore \quad x_1=7, \ y_1=1.$

(ii) সমীকরণে এই মান বসাইলে উহা সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ (ii) বৃত্তের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (7, 1) আছে, যে বিন্দুতে স্পর্শক, (i) রেখার সহিত অভিন্ন।

$\therefore$ (i) রেখা (ii) বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 1).

বিকল্প পদ্ধতি।

স্পষ্টতঃই, (ii) বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, −2) এবং ইহার ব্যাসার্ধ

$$=\sqrt{(-3)^2+2^2-(-12)}=5.$$

(i) সরলরেখার লম্ব-দূরত্ব (ii) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যদি ব্যাসার্ধের সমান হয়, তবে এই সরলরেখা বৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে। এক্ষণে, (3, −2) বিন্দু হইতে (i) সরলরেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য

$$=\frac{4.3+3.(-2)-31}{-\sqrt{4^2+3^2}}=5= \text{বৃত্তের ব্যাসার্ধ।}$$

$\therefore$ (i) সরলরেখা (ii) বৃত্তকে স্পর্শ করে।

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ধরিয়া এবং (i) সরলরেখার সহিত এই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণের তুলনা করিয়া পূর্বের মত (x_1, y_1) স্থানাঙ্কের মান নির্ণয় করা যায়।

4. *Prove that the locus of the middle points of any system of parallel chords of a circle is a diameter passing through the centre.*

বৃত্তের কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া বৃত্তের সমীকরণটিকে লেখা যায়

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

মনে কর, বৃত্তের একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-গুলির একটির সমীকরণ

$$y = mx + c \qquad \cdots \quad \text{(ii)}$$

এই প্রস্থ সমস্ত জ্যা-র ক্ষেত্রে 'm' ধ্রুবক, কিন্তু বিভিন্ন জ্যা-র ক্ষেত্রে c ভিন্ন ভিন্ন।

(i) এবং (ii)-এর ছেদবিন্দু নির্ণয় করিতে হইলে, এই দুই সমীকরণ হইতে y অপসারণ করিলে ছেদবিন্দুর ভুজগুলি আমরা নিম্ন-সমীকরণ হইতে পাই

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2,$$

বা, $$x^2(1 + m^2) + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0.$$

(i) এবং (ii)-এর ছিন্ন জ্যা-র প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হইলে, x_1, x_2 উপরিস্থ সমীকরণের বীজ বলিয়া $x_1 + x_2 = -\dfrac{2mc}{1 + m^2}$.

এক্ষণে, জ্যা-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক (X, Y) হইলে

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{mc}{1 + m^2}.$$

আবার, X, Y (ii) সরলরেখার উপর অবস্থিত বলিয়া $Y = mX + c$.

এই দুই সমীকরণ হইতে c অপসারিত করিলে

$$X = -\frac{m}{1 + m^2}(Y - mX), \text{ or, } X + mY = 0.$$

c নিরপেক্ষ বলিয়া এই সমীকরণ এই সমান্তরাল প্রস্থের সমস্ত জ্যা-র মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ অর্থাৎ এই সমীকরণ নির্দেশিত সরলরেখা সমস্ত জ্যা-র মধ্যবিন্দু-গামী। স্পষ্টতঃই ইহা মূলবিন্দু অর্থাৎ বৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। অতএব, ইহা একটি ব্যাস।

Examples IV

1. Obtain the equation to a circle having its centre at (3, 7) and diameter 10.

What is the length of the intercept of this circle on the y-axis ? [H. S. 1960, Compartmental]

2. The extremities of a diameter of a circle have co-ordinates $(-4, 3)$ and $(12, -1)$. Find the equation to the circle. What length does it intercept on the y-axis ?

[H. S. 1961, Compartmental]

3. Show that the equation $3x^2 + 3y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ represents a circle, and find its radius and co-ordinates of its centre.

4. Obtain the equation to the circle passing through the points $(3, 4)$, $(3, -6)$, $(-1, 2)$, and determine its centre and radius. [H. S. 1961]

5. Obtain the co-ordinates of the centre of the circle passing through the points $(1, 2)$, $(3, -4)$, $(5, -6)$ and determine the length of its diameter.

Is the origin inside or outside the circle ? [H. S. 1960]

6. Find the equation to a circle which passes through the points $(0, -3)$ and $(3, -4)$ and which has its centre on the straight line $2x - 5y + 12 = 0$.

7. Find the equation to the circle passing through the origin and having intercepts 4 and -6 on the x-axis and y-axis respectively.

8. Find the equations to the circles which touch the axis of x and pass through the points $(1, -2)$ and $(3, -4)$.

9. A and B are two fixed points on a plane and the point P moves on the plane in such a way that PA = 2PB always. Prove analytically that the locus of P is a circle.

[H. S. 1961, Compartmental]

10. B, C are fixed points having co-ordinates (3, 0) and (−3, 0) respectively. If the vertical angle BAC be 90°, show that the locus of the centroid of the triangle ABC is a circle whose equation you are to determine. [H. S. 1961]

11. (i) Find the length of the chord of the circle $x^2+y^2=64$, intercepted on the straight line $3x+4y-c=0$.

(ii) Obtain the co-ordinates of the points of contact of any one of the two tangents to the above circle $x^2+y^2=64$, parallel to the line $3x+4y-c=0$. [H. S. 1960]

12. Prove that the straight line $y=x+a\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$, and find its point of contact. [H. S. 1961]

13. Show that the line $3x+4y+7=0$ touches the circle $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, and find its point of contact.

14. Determine whether the straight line $x+y=2+\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2-2x-2y+1=0$. If it does, find the co-ordinates of the point of contact.

15. Find the equation to the circle

(i) having its centre at the point (3, 4) and touching the straight tine $5x+12y+2=0$;

(ii) having its centre at (1, −3) and touching the straight line $2x-y-4=0$.

16. Find the points at which the tangents to the circle $x^2+y^2-6x+8y=0$ is parallel to the line $3x+4y=0$.

17. Find the points on the circle $x^2+y^2-2x+6y-58=0$ at which the tangents are perpendicular to the line $4x-y=2$.

18. Show that the two circles

(i) $x^2+y^2+6x+14y+9=0$ and $x^2+y^2-4x-10y-7=0$ touch each other externally ;

(ii) $x^2+y^2-6x+6y-18=0$ and $x^2+y^2-2y=0$ touch each other internally.

19. Find the length of the tangent drawn from

(i) the point $(-3, 11)$ to the circle $x^2+y^2-4x+2y-20=0$;

(ii) the point $(7, 2)$ to the circle $2x^2+2y^2+5x+y-15=0$.

20. Show that the locus of the points from which the lengths of the tangents to the circles $x^2+y^2-3x+4y-7=0$ and $x^2+y^2+2x-5y+1=0$ are equal, is a straight line perpendicular to the line joining the centres of the circles.

ANSWERS

1. $x^2+y^2-6x-14y+33=0$; 8.

2. $x^2+y^2-8x-2y-51=0$; $4\sqrt{13}$.

3. $\frac{1}{6}\sqrt{13}$; $(\frac{5}{6}, 1)$. **4.** $x^2+y^2-6x+2y-15=0$; $(3, -1)$; 5.

5. $(11, 2)$; 20; outside. **6.** $x^2+y^2-8x-8y-33=0$.

7. $x^2+y^2-4x+6y=0$.

8. $x^2+y^2-6x+4y+9=0$, $x^2+y^2+10x+20y+25=0$.

10. $x^2+y^2=1$. **11.** (i) $\frac{2}{5}\sqrt{1600-c^2}$. (ii) $(\frac{24}{5}, \frac{32}{5})$, or, $(-\frac{24}{5}, -\frac{32}{5})$.

12. $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **13.** $(-1, -1)$. **14.** Yes; $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

15. (i) $x^2+y^2-6x-8y=0$. (ii) $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$.

16. $(6, 0)$ and $(0, -8)$. **17.** $(3, 5)$ and $(-1, -11)$.

19. (i) 12. (ii) 8.

পঞ্চম অধ্যায়

কনিক (Conics)

5·1. সংজ্ঞা।

কোন সমতলের উপর একটি বিন্দু যদি এভাবে চলিয়া বেড়ায় যে, ঐ সমতলে অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে চলন্তবিন্দুর দুই দূরত্বের অনুপাত সতত ধ্রুবক থাকে, তবে ঐ চলন্তবিন্দুর সঞ্চারপথকে কনিক (Conic) বলা হয়।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে Conic-এর **নাভি (focus)** এবং নির্দিষ্ট সরলরেখাকে Conic-এর **নিয়ামক (directrix)** বলা হয়। কনিকের নাভি সাধারণতঃ 'S' অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়।

নিয়ামকের (directrix) উপর নাভিবিন্দুগামী লম্বরেখাকে Conic এর **অক্ষ** (axis) বলা হয়।

নির্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে চলন্তবিন্দুর দুই দূরত্বের ধ্রুবক অনুপাতকে Conic-এর **উৎকেন্দ্রতা (eccentricity)** বলা হয় এবং ইহা সাধারণতঃ 'e' অক্ষর দ্বারা সূচিত হয়।

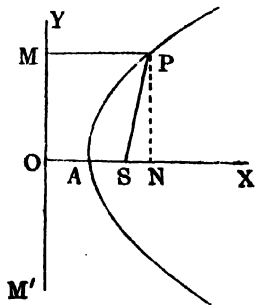
উৎকেন্দ্রতার মান-অনুসারে Conic ভিন্ন ভিন্ন নামে পরিচিত।

'e' (উৎকেন্দ্রতা) 1 এর সমান হইলে Conic **অধিবৃত্ত (Parabola), 'e'**, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে Conic উপবৃত্ত (Ellipse) এবং 'e', 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে Conic পরাবৃত্ত (Hyperbola) নামে অভিহিত হয়।

দ্রষ্টব্য। কোন শঙ্কুকে (cone) একটি সমতল দ্বারা বিভিন্ন প্রকারে ছেদ করাইয়া এই বক্ররেখাবদ্ধ চিত্রগুলির প্রথম উদ্ভব বলিয়া ইহাদিগকে Conic নামে অভিহিত করা হইয়াছে।

5·2. অধিবৃত্ত (Parabola)।

(A) অধিবৃত্তের অক্ষ এবং নিয়ামককে যথাক্রমে ভুজাক্ষ ও কোটি-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ।

মনে কর, নির্দিষ্ট বিন্দু S এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা MM′ যথাক্রমে অধিবৃত্তের নাভি (focus) এবং নিয়ামক (directrix), এবং S বিন্দুগামী OSX সরলরেখা

নিয়ামক (directrix) MM′ এর উপর O বিন্দুতে লম্ব। সুতরাং, OSX রেখা অধিবৃত্তের অক্ষ।

মনে কর, OX, x-অক্ষ এবং নিয়ামক (directrix)এর বরাবর OY, y-অক্ষ, অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y). PN ও PM যদি P বিন্দু হইতে যথাক্রমে OX ও OY এর উপর লম্ব হয়, তবে

$$PM = ON = x, \ PN = y.$$

নিয়ামক (directrix) হইতে S বিন্দুর দূরত্ব OS ধর d. সুতরাং, S এর স্থানাঙ্ক $(d, 0)$.

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে

$$\frac{PS}{PM} = 1, \text{ বা, } PS = PM. \quad \therefore \quad PS^2 = PM^2,$$

বা, $(x - d)^2 + y^2 = x^2$

$\therefore \quad y^2 = 2d(x - \frac{1}{2}d)$. $d = 2a$ ধরিলে, এই সমীকরণ নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$\mathbf{y^2 = 4a(x - a).} \quad \dots \quad \dots \quad \text{(i)}$$

A, OS এর মধ্যবিন্দু হইলে, $OA = AS = a$.

তাহা হইলে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$. এই স্থানাঙ্ক (i) সমীকরণকে সিদ্ধ

করে। সুতরাং, A অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু। এই A বিন্দুকে অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (vertex) বলা হয়।

(B) অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে মূলবিন্দু স্থানান্তরিত করিলে অধিবৃত্ত-নির্দেশক সমীকরণ (i) নিম্নের আকারে পরিণত হয়

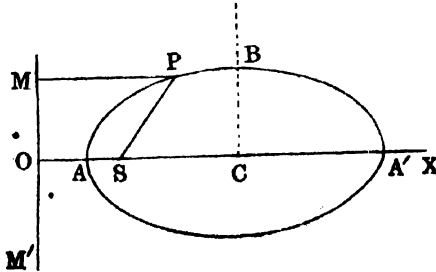
$$y^2 = 4ax. \qquad \ldots \qquad \ldots. \quad \text{(ii)}$$

ইহাই অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

এখানে, অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, ইহার অক্ষ ভুজাক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুগামী নিয়ামকের সমান্তরাল একটি সরলরেখা কোটি-অক্ষ। নাভি (focus) হইতে শীর্ষবিন্দু এবং নিয়ামক হইতে শীর্ষবিন্দুর লম্ব-দূরত্ব উভয়ই a র সমান।

দ্রষ্টব্য। অধিবৃত্তের আকার এবং উহার প্রধান প্রধান ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনার জন্য ষষ্ঠ অধ্যায় দেখ।

5.3. উপবৃত্ত (Ellipse)।

(A) নিয়ামক (directrix)-কে y-অক্ষ এবং নাভিবিন্দুগামী ইহার লম্বরেখাকে x-অক্ষ ধরিয়া উপবৃত্তের সমীকরণ।

মনে কর, S উপবৃত্তের নাভি, MM′ ইহার নিয়ামক (directrix) এবং 'e' (<1) ইহার উৎকেন্দ্রতা (eccentricity), MM′ রেখার উপর লম্ব OSX রেখা x-অক্ষ এবং নিয়ামক (directrix) বরাবর OY রেখা y-অক্ষ। ধর, উপবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নিয়ামক (directrix) হইতে নাভির দূরত্ব SO, d ধর। P বিন্দু হইতে নিয়ামক (directrix) এর উপর PM লম্ব হইলে, $PM = x$.

এক্ষণে, উপবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে

$$\frac{PS}{PM}=e \text{ বা, } PS=e.\,PM. \quad \therefore\; PS^2=e^2.\,PM^2.$$

$\therefore$ S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(d, 0)$ বলিয়া

$$(x-d)^2+y^2=e^2x^2. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

নিয়ামক (directrix) কে y-অক্ষ এবং S বিন্দুগামী ইহার লম্বরেখাকে x-অক্ষ ধরিলে ইহাই উপবৃত্তের সমীকরণ। বলা বাহুল্য, নিয়ামক (directrix) হইতে নাভির দূরত্ব d.

(B) উপবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

উপরিলিখিত (i) সমীকরণ নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$x^2(1-e^2)-2dx+d^2+y^2=0,$$

$$\text{বা, } (1-e^2)\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{d^2}{1-e^2}-d^2=\frac{d^2e^2}{1-e^2},$$

$$\text{বা, } \left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{de}{1-e^2}\right)^2.$$

$a=\dfrac{de}{1-e^2}$ ধরিয়া এবং অক্ষদ্বয় সমান্তরাল রাখিয়া মূলবিন্দু O কে C বিন্দুতে $\left(\dfrac{d}{1-e^2}, 0\right)$ অর্থাৎ $\left(\dfrac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে উপবৃত্তের সমীকরণের নিম্নের আদর্শ আকার হয়।

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1,$$

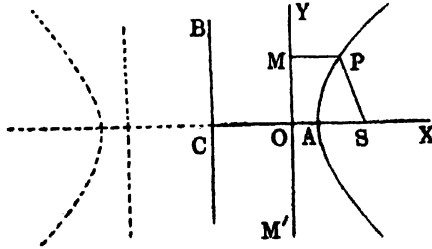
$$\text{অর্থাৎ } \mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{যখন } b^2=a^2(1-e^2).}$$

এখানে C বিন্দুকে উপবৃত্তের **কেন্দ্র** বলা হয়।

দ্রষ্টব্য। উপবৃত্তের আকৃতি এবং উহার মৌলিক ধর্ম-সম্বন্ধীয় আলোচনা সপ্তম অধ্যায়ে দেখ।

5·4. পরাবৃত্ত (Hyperbola)।

(A) নিয়ামককে y-অক্ষ এবং নাভিবিন্দুগামী নিয়ামকের লম্বরেখাকে x-অক্ষ ধরিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ।

মনে কর, S পরাবৃত্তের নাভি, MM′ ইহার নিয়ামক এবং 'e' (>1) ইহার উৎকেন্দ্রতা, MM′ রেখার উপর লম্ব OSX রেখা x-অক্ষ এবং নিয়ামক MM′ বরাবর OY রেখা y-অক্ষ। ধর, পরাবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P এর

স্থানাঙ্ক (x, y) এবং নিয়ামক হইতে নাভির দূরত্ব SO, d ধর। P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব হইলে PM $= x$.

এক্ষণে, পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে

$$\frac{PS}{PM} = e \text{ বা, } PS = e.\,PM. \quad \therefore\ PS^2 = e^2.\,PM^2.$$

$\therefore$ S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(d, 0)$ বলিয়া

$$(x-d)^2 + y^2 = e^2x^2. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

নিয়ামককে y-অক্ষ এবং নাভিবিন্দুগামী ইহার লম্বরেখাকে x-অক্ষ ধরিলে এবং নাভিবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব d মনে রাখিলে ইহাই পরাবৃত্তের সমীকরণ হইবে।

(B) পরাবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

উপরিলিখিত সমীকরণ (i) নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$x^2(e^2-1) + 2dx - y^2 = d^2, \text{ এখানে } e > 1.$$

বা, $$(e^2-1)\left(x + \frac{d}{e^2-1}\right)^2 - y^2 = d^2 + \frac{d^2}{e^2-1} = \frac{e^2d^2}{e^2-1}.$$

বা, $$\left(x + \frac{d}{e^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = \left(\frac{de}{e^2-1}\right)^2.$$

$\frac{de}{e^2-1} = a$ ধরিয়া এবং অক্ষদ্বয় সমান্তরাল রাখিয়া মূলবিন্দু O কে C বিন্দুতে

$\left(-\frac{d}{e^2-1}, 0\right)$ অর্থাৎ $\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নিম্নের আদর্শ আকারে পরিণত হয়

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$$

বা, $\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}}-\frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}}=\mathbf{1}$, যখন $\mathbf{b^2=a^2(e^2-1)}$.

এখানে মূলবিন্দু C নাভিবিন্দুর বিপরীত দিকে নাভিবিন্দুগামী নিয়ামকের লম্বের উপর নিয়ামক রেখা হইতে $\frac{d}{e^2-1}$ বা $\frac{a}{e}$ দূরে অবস্থিত। এই C বিন্দুকে পরাবৃত্তের কেন্দ্র বলে।

চিত্র হইতে $CS=d+\frac{d}{e^2-1}=\frac{de^2}{e^2-1}=ae.$

দ্রষ্টব্য। পরাবৃত্তের আকার এবং উহার মৌলিক ধর্ম-সম্বন্ধীয় আলোচনা অষ্টম অধ্যায়ে দেখ।

5·5. উদাহরণাবলী।

1. *Find out the equation to the parabola whose focus is* $(-3, 4)$ *and directrix is* $6x-7y+5=0$. [*H. S. 1961.*]

অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক, মনে কর, (x_1, y_1). নির্দিষ্ট নাভিবিন্দু $(-3, 4)$ হইতে ইহার দূরত্ব $\sqrt{(x_1+3)^2+(y_1-4)^2}$ এবং নির্দিষ্ট নিয়ামক রেখা $6x-7y+5=0$ হইতে ইহার লম্ব-দূরত্ব $\frac{6x_1-7y_1+5}{\sqrt{6^2+7^2}}$.

অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে এই দুই দূরত্ব সমান।

সুতরাং, $(x_1+3)^2+(y_1-4)^2=\frac{(6x_1-7y_1+5)^2}{6^2+7^2}$. অতএব, অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) নিম্নের সমীকরণ সিদ্ধ করে।

$$85\{(x+3)^2+(y-4)^2\}=(6x-7y+5)^2,$$

বা, $49x^2+84xy+36y^2+450x-610y+2100=0.$

ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

2. *Find the equation to the ellipse, whose focus is the point* $(-1, 1)$ *and directrix is the line* $x-y+3=0$, *and whose eccentricity is* $\frac{1}{2}$.

মনে কর, উপবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1). প্রদত্ত নাভিবিন্দু $(-1, 1)$ হইতে ইহার দূরত্ব $\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-1)^2}$ এবং প্রদত্ত নিয়ামক-রেখা $x-y+3=0$ হইতে ইহার লম্ব-দূরত্ব $\frac{x_1-y_1+3}{\sqrt{1+1}}$.

উপবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দুর ক্ষেত্রে এই দুই দূরত্বের অনুপাত প্রদত্ত উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ এর সমান।

$$\therefore \quad \sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1-y_1+3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা,} \quad 8\{(x_1+1)^2+(y_1-1)^2\}=(x_1-y_1+3)^2.$$

অতএব, উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) নিম্নের সমীকরণ সিদ্ধ করে

$$8\{(x+1)^2+(y-1)^2\}=(x-y+3)^2,$$

$$\text{বা,} \quad 7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0.$$

ইহাই প্রস্তাবিত উপবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

ষষ্ঠ অধ্যায়

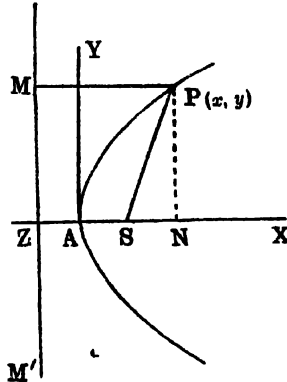
অধিবৃত্ত (Parabola)

6·1. অধিবৃত্ত (Parabola)।

অধিবৃত্তের সংজ্ঞা পূর্ববর্তী অধ্যায়েই দেওয়া হইয়াছে। তদনুসারে, কোন সমতলের উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ও একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা দেওয়া থাকিলে, ঐ সমতলের উপর একটি চলন্তবিন্দুর নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে দূরত্ব এবং প্রদত্ত সরলরেখা হইতে লম্ব-দূরত্ব যদি সর্বদাই সমান থাকে, তবে ঐ চলন্তবিন্দু একটি বক্ররেখা উৎপন্ন করে, এবং এই বক্ররেখাকে অধিবৃত্ত বলা হয়।

নির্দিষ্ট বিন্দুটি অধিবৃত্তের **নাভি** (focus) এবং নির্দিষ্ট সরলরেখা ইহার **নিয়ামক** (directrix) নামে অভিহিত।

6·2. অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

মনে কর, S অধিবৃত্তের নাভিবিন্দু এবং MM′ ইহার নিয়ামক রেখা। S বিন্দু

হইতে MM′ এর উপর SZ লম্ব টান এবং মনে কর, ZS এর মধ্যবিন্দু A. যেহেতু, AS = AZ, ∴ A অধিবৃত্তের উপর একটি বিন্দু। এই A বিন্দু অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (vertex) নামে অভিহিত।

নাভিবিন্দু S হইতে শীর্ষবিন্দু A-র দূরত্ব, ধর a. তাহা হইলে $AZ = a$ এবং $SZ = 2a$.

মনে কর, A মূলবিন্দু, S বিন্দুগামী নিয়ামকের লম্বরেখা ASX, x-অক্ষ এবং A বিন্দুগামী নিয়ামকের সমান্তরাল রেখা AY, y-অক্ষ। S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$.

অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে যদি PN, PM, P বিন্দু হইতে যথাক্রমে AX এবং নিয়ামক MM′ এর উপর অঙ্কিত লম্ব হয়, তবে $PM = ZN = AZ + AN = a + x$.

এক্ষণে, অধিবৃত্তের সংজ্ঞা হইতে

$$PS = PM \text{ বা, } PS^2 = PM^2.$$

$$\therefore \quad (x-a)^2 + y^2 = (a+x)^2.$$

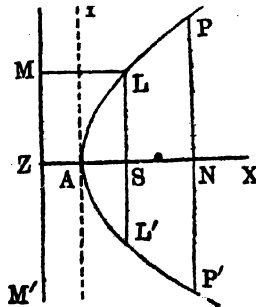
$$\therefore \quad \mathbf{y^2 = 4ax}.$$

অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা এই শর্ত সিদ্ধ হওয়ায় অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া ইহাই অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

এখানে 'a' নাভিবিন্দু অথবা নিয়ামক-রেখা হইতে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব, এবং x-অক্ষরূপে মনোনীত নিয়ামকের লম্ব S বিন্দুগামী AX রেখা অধিবৃত্তের **'অক্ষ'** (axis)-রূপে পরিচিত।

দ্রষ্টব্য। পূর্ববর্তী অধ্যায়ে Z বিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ প্রথমে স্থির করা হয়। পরে A বিন্দুতে মূলবিন্দু স্থানান্তর করার পর উপরের লিখিত আদর্শ আকারে ঐ সমীকরণ নির্ণীত হইয়াছে।

6·3. অধিবৃত্তের আকৃতি এবং মৌলিক ধর্ম।

$y^2 = 4ax$ সমীকরণ হইতে ইহা স্পষ্ট বুঝা যায় যে, x ঋণাত্মক হইলে, y^2 ও

ঋণাত্মক হইবে এবং সেইক্ষেত্রে y এর মান কাল্পনিক হইবে। অতএব, $y^2=4ax$ সমীকরণ-নির্দেশিত অধিবৃত্তের কোন অংশ মূলবিন্দু A-র বাম পার্শ্বে অবস্থিত নয়। ইহার সমস্ত অংশ y-অক্ষ-নির্দেশক AY রেখার দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত।

আবার, x-এর মান ধনাত্মক হইলে প্রতি ক্ষেত্রেই y-এর দুইটি সমান ও বিপরীত মান পাওয়া যায়। সুতরাং, y (=PN) পরিমিত ধনাত্মক কোটি-বিশিষ্ট অধিবৃত্তের উপরিস্থ এক বিন্দু P-র সমতুল্য অধিবৃত্তের উপর একই ভুজ x(=AN)-বিশিষ্ট অপর একটি বিন্দু P′ আছে যাহার কোটি P বিন্দুর কোটির সমমান কিন্তু ঋণাত্মক ; x-অক্ষ AX-এর লম্ব PNP′-জাতীয় অধিবৃত্তের সমস্ত জ্যা AX রেখা কর্তৃক সমদ্বিখণ্ডিত। ভুজ x যখন কমিতে কমিতে শেষপর্যন্ত 0 হয়, তখন সমমান কিন্তু বিপরীত দুই কোটিও 0 হয় এবং বিন্দুটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং মূলবিন্দুর সহিত এক হইয়া যায়। আবার, যখন ভুজ x ক্রমশঃ বড় হইতে থাকে, তখন y-এর মানও বড় হইতে থাকে। সুতরাং, অধিবৃত্তের আকৃতি চিত্রের মত বাম প্রান্তে A বিন্দুতে সীমাবদ্ধ এবং দক্ষিণ প্রান্তে মুক্ত। সম্পূর্ণ অধিবৃত্তটি OX অক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

এই ধর্মের জন্যই OX রেখাকে অধিবৃত্তের অক্ষ এবং A বিন্দুকে ইহার শীর্ষবিন্দু নামে অভিহিত করা হয়।

নিয়ামকের সমান্তরাল (অর্থাৎ অক্ষের লম্ব) এবং অক্ষ কর্তৃক সমদ্বিখণ্ডিত PNP′ জ্যা-কে ডবল কোটি বলা হয়। PN অথবা P′N-কে, P অথবা P′ বিন্দুর কোটি বলা হয়।

নিয়ামকের সমান্তরাল (অর্থাৎ অক্ষের লম্ব) S বিন্দুগামী LSL′ জ্যা-কে **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলা হয়।

নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু L হইতে নিয়ামকের উপর লম্ব যদি LM হয়, তবে অধিবৃত্তের ধর্মানুসারে $\text{LS}=\text{LM}=Z\text{S}=2\text{AS}=2a$,

অতএব, **নাভিলম্ব $=4a$**

অর্থাৎ, নাভিলম্ব শীর্ষবিন্দু হইতে নাভির দূরত্বের চারিগুণ অথবা নিয়ামক-রেখা হইতে নাভির দূরত্বের দ্বিগুণ।

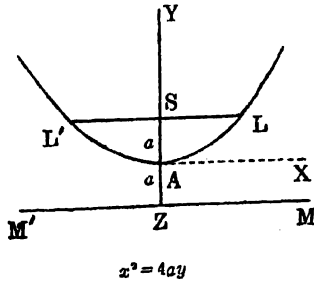
অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের জ্যামিতিক ধর্ম $\text{PN}^2=4\text{AS}.\ \text{AN}$ সূচিত করে অর্থাৎ অধিবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুর কোটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সেই বিন্দুর ভুজ এবং অধিবৃত্তের নাভিলম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

অধিবৃত্তের আদর্শ আকারের সমীকরণ হইতে আমরা প্রধানতঃ জানিতে পারি

অধিবৃত্তের (i) শীর্ষবিন্দুই মূলবিন্দু ;
(ii) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$;
(iii) নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$;
(iv) $x = -a$, নিয়ামকের সমীকরণ ;
(v) অক্ষই ভুজাক্ষ ;
এবং (vi) নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় L এবং L′ এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 2a)$ এবং $(a, -2a)$.

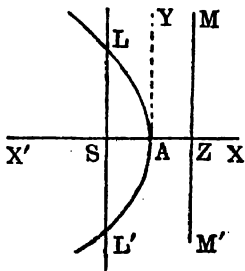
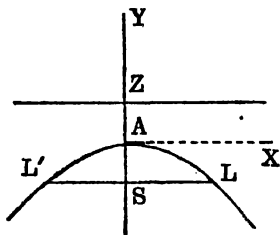
দ্রষ্টব্য। (i) $x^2 = 4ay$, (ii) $y^2 = -4ax$ এবং (iii) $x^2 = -4ay$ সমীকরণত্রয়।

(i) অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, x-অক্ষ নিয়ামকের সমান্তরাল, অধিবৃত্তের অক্ষ (নাভিবিন্দুগামী নিয়ামকের লম্ব) y-অক্ষ বরাবর এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য পূর্ববৎ $4a$ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4ay$ হয় এবং অধিবৃত্তের আকৃতি নিম্নচিত্রের মত হয়।

$x^2 = 4ay$

এখানে, নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, a)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $y = -a$. নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় L এবং L′এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2a, a)$ এবং $(-2a, a)$.

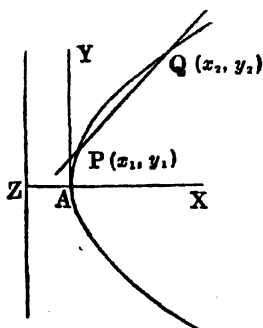
(ii) x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্ যদি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দিকে ধরা হয়, তাহা হইলে শীর্ষবিন্দু হইতে নাভিবিন্দুর দিক্ ঋণাত্মক হইবে। তখন, $y^2 = 4ax$ সমীকরণের পরিবর্তিত আকার $y^2 = -4ax$ হইবে এবং ইহার নির্দেশিত অধিবৃত্তের আকৃতি নিম্নের বাম দিকের চিত্রের মত হইবে। অধিবৃত্তের অবতলভাগ (concavity) x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে হইবে।

এখানে, নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ এবং $x = a$ রেখা নিয়ামক।

অনুরূপভাবে, $x^2 = 4ay$ সমীকরণে y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্ যদি বিপরীত দিকে

$y^2 = -4ax$ $x^2 = -4ay$

ধরা যায়, তবে সমীকরণটি $x^2 = -4ay$ হইয়া দাঁড়ায় এবং অধিবৃত্তের আকৃতি উপরের দক্ষিণ দিকের চিত্রের মত হয় এবং অধিবৃত্তের অবতলপার্শ্ব (concavity) y-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে থাকে।

নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -a)$ এবং নিয়ামক-রেখার সমীকরণ $y = a$.

6·4. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

মনে কর, $y^2 = 4ax$······(i) অধিবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং ইহার সন্নিহিত অপর এক বিন্দু Q এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2).

PQ জ্যা-র সমীকরণ $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. ... (ii)

এক্ষণে, উভয় বিন্দু P ও Q, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া

$$y_1^2=4ax_1 \quad \cdots \quad \text{(iii)} \quad \text{এবং} \quad y_2^2=4ax_2 \quad \cdots \quad \text{(iv)}.$$

$\therefore$ (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া

$$y_2^2-y_1^2=4a(x_2-x_1),$$

বা $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4a}{y_2+y_1}.$$

$\therefore$ (ii) সমীকরণ নিম্নলিখিতভাবে লেখা যায়

$$y-y_1=\frac{4a}{y_2+y_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

এক্ষণে, P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ রেখাকে এমনভাবে ঘুরাইতে থাক, যেন Q বিন্দু ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে হইতে শেষপর্যন্ত P বিন্দুর সহিত একেবারে মিশিয়া যায়। সুতরাং, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1)এর সহিত অভিন্ন হইয়া যাইবে এবং তখন PQ সরলরেখা P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং (v) হইতে উহার সমীকরণ দাঁড়াইবে

$$y-y_1=\frac{4a}{2y_1}(x-x_1),$$

বা, $$yy_1-y_1^2=2a(x-x_1),$$

অর্থাৎ, $$yy_1=y_1^2+2a(x-x_1)=4ax_1+2a(y-y_1)$$

[(iii) এর সাহায্যে]

বা $$yy_1=2a(x+x_1).$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{yy_1=2a(x+x_1).}$$

অনুসিদ্ধান্ত। y-অক্ষ $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক।

6·5. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ।

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের

সমীকরণ $\quad yy_1=2a(x+x_1),$

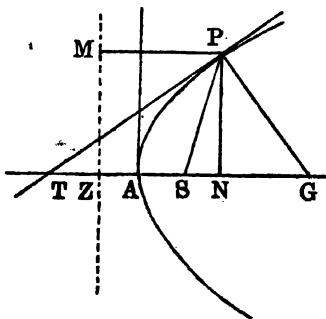
বা, $y = \frac{2a}{y_1}(x + x_1)$, $\therefore$ ইহার 'm' $= \frac{2a}{y_1}$.

আবার, অভিলম্ব স্পর্শকের উপর লম্ব হওয়ায় অভিলম্বের 'm' $= -\frac{y_1}{2a}$,

এবং ইহা x_1, y_1 বিন্দুগামী

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1).}$$

6·6. স্পর্শক ও অভিলম্বের ধর্মাবলী ; উপ-স্পর্শক (Sub-tangent) ও উপ-অভিলম্ব (Sub-normal)।

অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং সেই বিন্দুর কোটি-নির্দেশক রেখা অধিবৃত্ত অক্ষের যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, সেই দুই বিন্দুর মধ্যবর্তী অধিবৃত্ত অক্ষের দৈর্ঘ্য **উপ-স্পর্শক** (sub-tangent) নামে অভিহিত।

অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে অভিলম্ব এবং সেই বিন্দুর কোটি-নির্দেশক রেখা অধিবৃত্ত অক্ষ হইতে যে অংশ ছিন্ন করে, সেই ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্যকে **উপ-অভিলম্ব** (sub-normal) বলা হয়।

P বিন্দুতে স্পর্শক PT এবং অভিলম্ব PG যদি অধিবৃত্ত-অক্ষকে যথাক্রমে T ও G বিন্দুতে ছেদ করে এবং PN যদি P-র কোটি হয়, তবে TN উপ-স্পর্শক ও NG উপ-অভিলম্ব।

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের $yy_1 = 2a(x + x_1)$ সমীকরণে $y = 0$

বসাইলে স্পর্শক অক্ষকে যে T বিন্দুতে ছেদ করে তাহা পাওয়া যায়। এখানে T বিন্দুর ক্ষেত্রে $x + x_1 = 0$ অর্থাৎ $x = -x_1$.

$\therefore$ মানের ব্যাপারে AT = AN, কিন্তু T বিন্দু A বিন্দুর ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

AT এবং ANএর এই সম্পর্ক হইতে আমরা অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত জ্যামিতিক ধর্ম পাই—অধিবৃত্তের যে-কোন বিন্দুর উপ-স্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

আবার, P বিন্দুতে অভিলম্বের $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ সমীকরণে $y = 0$ বসাইলে G বিন্দুর ক্ষেত্রে আমরা পাই

$$x - x_1 = 2a,$$

অর্থাৎ, $\quad \text{AG} - \text{AN} = 2a,$

বা, $\quad \text{NG} = 2a =$ নাভিলম্বের অর্ধেক।

সুতরাং, কোন বিন্দুর উপ-অভিলম্ব ধ্রুবক এবং নাভিলম্বের অর্ধেক।

আবার AT = AN এবং AS = AZ

$\therefore$ এই দুইটি যোগ করিয়া আমরা পাই

TS = ZN = PM (PM নিয়ামকের উপর লম্ব)
= SP.

$\therefore \quad \angle \text{SPT} = \angle \text{PTS} =$ একান্তর $\angle \text{TPM}$.

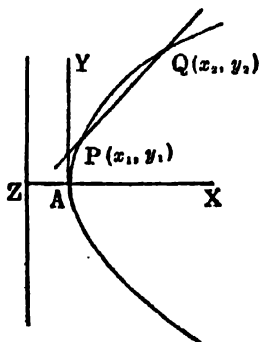
আবার, যেহেতু $\angle \text{TPG} = 1$ সমকোণ, $\therefore \angle \text{SPG} = \angle \text{SGP}$.

ইহা হইতে আমরা অধিবৃত্তের আরও জ্যামিতিক ধর্ম জানিতে পারি—

(i) অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শক ঐ বিন্দুর সহিত নাভির সংযোজক-রেখা এবং ঐ বিন্দু হইতে নিয়ামক-রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের মধ্যবর্তী কোণ সমদ্বিখণ্ডিত করে;

(ii) অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে স্পর্শক, অক্ষ এবং বিন্দুর নাভি সংযোজক-রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে; এবং

(iii) অধিবৃত্তের কোন বিন্দুতে অভিলম্ব, অক্ষ এবং বিন্দুর নাভি সংযোজক-রেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

6·7. y = mx + c সরলরেখা কর্তৃক y² = 4ax অধিবৃত্ত হইতে ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য।

অধিবৃত্তের সহিত প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়। সুতরাং, এই দুই সমীকরণে y অপনীত করিলে ছেদবিন্দুর ভুজ নিম্ন সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইবে

$$(mx+c)^2 = 4ax,$$

বা, $\quad m^2x^2 + 2(mc-2a)x + c^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad$ (i)

এইটি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, x-এর কেবলমাত্র দুইটি মান পাওয়া যায়। সেইজন্য $y = mx + c$ সরলরেখার সহিত $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের দুইটি ছেদবিন্দু পাওয়া যাইবে এবং এই দুইবিন্দু বাস্তব এবং পৃথক্, বাস্তব এবং অভিন্ন অথবা কাল্পনিক হইতে পারে।

মনে কর, ছেদবিন্দুদ্বয় হইল P এবং Q এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). তাহা হইলে x_1 এবং x_2 (i) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = -\frac{2(mc-2a)}{m^2} \text{ এবং } x_1x_2 = \frac{c^2}{m^2}.$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{4(mc-2a)^2}{m^4} - \frac{4c^2}{m^2} = \frac{16(a^2 - mca)}{m^4}.$$

আবার, P এবং Q প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত বলিয়া

$$y_1 = mx_1 + c \text{ এবং } y_2 = mx_2 + c.$$

$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$

$\therefore$ PQ জ্যা-র দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + m^2)}$$
$$= \sqrt{\frac{16(a^2 - mca)(1 + m^2)}{m^4}}$$
$$= \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a - mc)(1 + m^2)}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। স্পর্শক হইবার শর্ত।

যখন দুইটি ছেদবিন্দু একেবারে মিলিয়া যাইবে অর্থাৎ যখন ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য 0 হইবে, তখন প্রদত্ত রেখাটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

সুতরাং, প্রদত্ত সরলরেখা $y = mx + c$ অধিবৃত্ত $y^2 = 4ax$ কে স্পর্শ করিবার শর্ত

$$a - mc = 0, \text{ বা, } c = \frac{a}{m}.$$

6·8. 'm' এর যে-কোন মান হইলে $y = mx + \frac{a}{m}$ রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক হওয়ার প্রমাণ এবং স্পর্শবিন্দু নির্ণয়।

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$yy_1 = 2a(x + x_1),$$

$$\text{বা, } \quad y = \frac{2a}{y_1}x + \frac{2ax_1}{y_1} \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

এক্ষণে, $y = mx + \frac{a}{m}$ .... (ii) রেখাটি যদি অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হয়, তবে (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইবে।

$$\therefore \quad \frac{2a}{y_1} = m, \quad \frac{2ax_1}{y_1} = \frac{a}{m}.$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{a}{m^2}, \quad y_1 = \frac{2a}{m}.$$

$\therefore$ যদি কল্পিত (x_1, y_1) বিন্দুটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর একটি বাস্তব বিন্দু হয়, শুধু সেই ক্ষেত্রেই (ii) সমীকরণ সূচিত-রেখাটি অধিবৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

অর্থাৎ, যদি $\left(\frac{2a}{m}\right)^2 = 4a.\frac{a}{m^2}$

এবং ইহা সুস্পষ্টরূপে প্রতীয়মান।

অতএব, 'm' যাহাই হউক না কেন, $y = mx + \frac{a}{m}$ রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\mathbf{x_1 = \frac{a}{m^2}, \quad y_1 = \frac{2a}{m}.}$$

6·9. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুর স্থানাঙ্ক একটিমাত্র চলের সাহায্যে প্রকাশ।

অধিবৃত্তের $y^2 = 4ax$ সমীকরণে আমরা যদি $x = at^2$ এবং $y = 2at$ বসাই, তবে আমরা দেখিতে পাই 't' এর সকল মানের ক্ষেত্রেই সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং, $\mathbf{x = at^2}$ এবং $\mathbf{y = 2at}$ আকারে অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক একমাত্র চল 't' এর সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুর ক্ষেত্রে t-র মান ভিন্ন ভিন্ন হইবে। কোনও নির্দিষ্ট বিন্দুর ক্ষেত্রে t-র মান সুনির্দিষ্ট।

অধিবৃত্তের সমীকরণ যখন $y^2 = 4ax$ এই আদর্শ আকারে দেওয়া থাকে, তখন অধিবৃত্ত-সম্বন্ধীয় বহু অঙ্কের সমাধানে এক চল 't'-র সাহায্যে বিন্দুর স্থানাঙ্ক উপরিউক্ত প্রকারে প্রকাশের কল্পনা আমাদের বিশেষ সাহায্য করে।

এই সম্পর্কে আমাদের লক্ষণীয়, 't' বিন্দুতে

(i) **স্পর্শকের** সমীকরণ [§ 6·4 দেখ]

$$y.2at = 2a(x + at^2), \text{ বা, } \mathbf{y = \frac{x}{t} + at.}$$

এবং (ii) **অভিলম্বের** সমীকরণ [§ 6·5 দেখ]

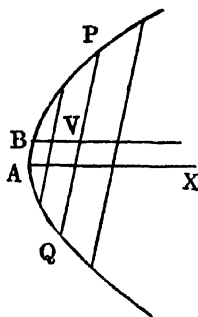
$$y - 2at = -\frac{2at}{2a}(x - at^2),$$

$$\text{বা, } \mathbf{y + tx = 2at + at^3.}$$

দ্রষ্টব্য। 't'-র তাৎপর্য।

't' তে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, $\frac{1}{t}$, 't' তে অঙ্কিত

স্পর্শক-রেখার gradient, অর্থাৎ অঙ্কিত রেখা x-অক্ষের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, 't' সেই কোণের cotangent.

6·10. একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চার পথ; ব্যাস।

$y^2 = 4ax$ .... (i) অধিবৃত্তের একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-গুলির অন্যতম PQ এর সমীকরণ, মনে কর, $y = mx + c$ .... (ii)

জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া সকল জ্যা-র 'm' অভিন্ন হইবে, কিন্তু এই প্রস্থের বিভিন্ন জ্যা-র c ভিন্ন ভিন্ন হইবে।

(i) এবং (ii) সমীকরণ-নির্দেশিত অধিবৃত্ত ও সরলরেখার ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি এই দুই সমীকরণ হইতে x অপনীত করিয়া প্রাপ্ত সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়। অপনয়নান্তে প্রাপ্ত সমীকরণ

$$y^2 = 4a\left(\frac{y-c}{m}\right), \quad \text{বা,} \quad my^2 - 4ay + 4ac = 0.$$

যদি P, Q ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) হয়, তবে উল্লিখিত সমীকরণ হইতে আমরা পাই

$$y_1 + y_2 = \frac{4a}{m}.$$

$\therefore$ PQ-এর মধ্যবিন্দু V-র কোটি y হইলে

$$y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{2a}{m}.$$

এই সমীকরণ c নিরপেক্ষ হওয়ায় এই প্রস্থ সকল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর দ্বারা ইহা সিদ্ধ।

সুতরাং, ইহা সকল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্দেশ করে এবং স্পষ্টতঃই এই সমীকরণ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি রেখা সূচিত করে।

কোন নির্দিষ্ট একপ্রস্থ সমান্তরাল সকল জ্যা-র সমদ্বিখণ্ডক এইপ্রকার সরলরেখা অধিবৃত্তের ব্যাস নামে অভিহিত।

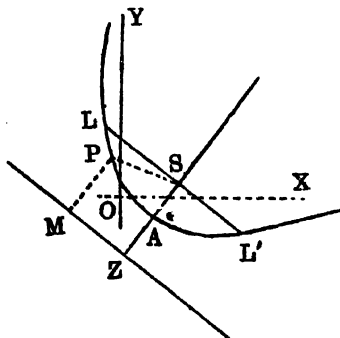
'm' এর ভিন্ন ভিন্ন মান হইলে অর্থাৎ জ্যা-গুলি x-অক্ষের সহিত বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিলে, ভিন্ন ভিন্ন ব্যাস পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য। আলোচ্য ব্যাস যদি অধিবৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে, তবে B বিন্দুর ক্ষেত্রেও $y=\frac{2a}{m}$ প্রযোজ্য। $\therefore\ x=\frac{y^2}{4a}=\frac{a}{m^2}$

এই বিন্দুতে $y=mx+\frac{a}{m}$ স্পর্শক-রেখা [§ 6·8] এবং এই স্পর্শকরেখা ঐ বিশিষ্ট ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত সকল জ্যা-র সমান্তরাল।

প্রকৃতপক্ষে অধিবৃত্ত অক্ষের সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখা অধিবৃত্তের ব্যাস, এবং ইহার প্রান্তবিন্দুতে অর্থাৎ শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল সকল জ্যা-র সমদ্বিখণ্ডক এই ব্যাস।

6·11. উদাহরণমালা।

Ex. 1. *The focus of a parabola is* (6, 2) *and its vertex is* (3, −2). *Find the equation to the parabola and the length of its latus rectum. Also obtain the co-ordinates of the extremities of its latus rectum.*

মনে কর, অধিবৃত্তের নাভিবিন্দু S এবং ইহার শীর্ষবিন্দু A-র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (6, 2) এবং (3, −2).

$\therefore\quad AS=\sqrt{(6-3)^2+(2+2)^2}=5.$

$\therefore$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=4AS=20.$

আবার, A এবং S এর সংযোজক-রেখা AS এর $`m' = \dfrac{2-(-2)}{6-3}=\dfrac{4}{3}$ এবং এই রেখাই অধিবৃত্তের অক্ষ। নাভিবিন্দুগামী নাভিলম্ব AS রেখার লম্ব বলিয়া ইহার নির্দেশক সমীকরণ

$$y-2=-\tfrac{3}{4}(x-6) \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (i)$$

নাভিলম্ব LSL′ এর L বা L′ প্রান্তের স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হইলে

$$SL^2=(x_1-6)^2+(y_1-2)^2.$$

আবার $SL=$ নাভিলম্বের অর্ধেক $=10.$

$$\therefore\quad (x_1-6)^2+(y_1-2)^2=100. \qquad \cdots \quad (ii)$$

এবং (x_1, y_1) নাভিলম্ব $y-2=-\frac{3}{4}(x-6)$ এর উপর অবস্থিত বলিয়া

$$y_1-2=-\tfrac{3}{4}(x_1-6). \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (iii)$$

(ii) ও (iii) হইতে $(x_1-6)^2(1+\frac{9}{16})=100$, বা, $(x_1-6)^2=64$;

$$\therefore\quad x_1-6=\pm 8.$$

'+' চিহ্ন লইলে, $x_1=14$ এবং (iii) হইতে $y_1=-4.$

'−' চিহ্ন লইলে, $x_1=-2$ এবং (iii) হইতে $y_1=8.$

অতএব, নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (14, −4) এবং (−2, 8).

এখন, অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করিতে SA রেখাকে Z বিন্দু পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত কর, যেন AZ = AS হয়। Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (α, β) ধরা যায়, তবে ZS এর মধ্যবিন্দু A-র স্থানাঙ্ক $\frac{1}{2}(\alpha+6)$, $\frac{1}{2}(\beta+2)$, কিন্তু শীর্ষবিন্দু A-র স্থানাঙ্ক (3, −2)

$$\therefore\quad \tfrac{1}{2}(\alpha+6)=3, \qquad \text{বা,}\quad \alpha=0,$$

$$\text{এবং}\quad \tfrac{1}{2}(\beta+2)=-2, \qquad \text{বা,}\quad \beta=-6.$$

নাভিবিন্দু হইতে নিয়ামক-রেখার উপর লম্বের মধ্যবিন্দু A বলিয়া Z স্পষ্টতঃই এই লম্বের পাদবিন্দু। সুতরাং, ZAS রেখার Z বিন্দুগামী লম্বই অধিবৃত্তের নিয়ামক।

অতএব, ইহার সমীকরণ

$$y+6=-\tfrac{3}{4}(x-0), \text{ বা, } \quad 3x+4y+24=0. \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে এবং P বিন্দু হইতে নিয়ামক-রেখার উপর লম্বের দৈর্ঘ্য PM হইলে

$$\text{SP}=\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}$$

$$\text{এবং} \quad \text{PM}=\frac{3x+4y+24}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3x+4y+24}{5}.$$

$$\because \quad \text{SP}=\text{PM}, \; \sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}=\frac{3x+4y+24}{5},$$

$$\text{বা,} \quad 25\{(x-6)^2+(y-2)^2\}=(3x+4y+24)^2.$$

ইহাই অধিবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ।

Ex. 2. *By suitably transferring the origin, show that the equation* $3y^2-10x-12y-18=0$ *reduces to the standard form of the equation to a parabola, and hence obtain the co-ordinates of its vertex and focus, and the length of its latus rectum. Also determine the equation to its directrix.*

প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$3(y^2-4y)=10x+18, \quad \text{বা,} \quad 3(y-2)^2=10(x+3).$$

এক্ষণে, মূলবিন্দু $(-3, 2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে এই সমীকরণটি

$$y^2=\tfrac{10}{3}x \quad \cdots \text{ (i) তে পরিণত হয়।}$$

এবং ইহাই অধিবৃত্তের সমীকরণের আদর্শ আকার।

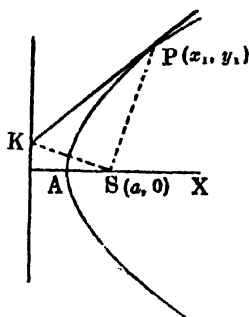
আমরা জানি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে, নাভিলম্ব $=4a$, মূলবিন্দুতে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু; নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং $x=-a$ নিয়ামক-রেখা। ইহার সহিত (i) অধিবৃত্ত তুলনা করিলে

নাভিলম্ব $=\frac{10}{3}$, অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু নূতন মূলবিন্দু এবং এই মূলবিন্দু-অনুসারে নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{6}, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x=-\frac{5}{6}$.

এক্ষণে, প্রদত্ত পূর্ব মূলবিন্দু অনুসারে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 2)$ নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3+\frac{5}{6}, 2+0)$ অর্থাৎ $(-2\frac{1}{6}, 2)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ

$$x=-\tfrac{5}{6}-3 \quad \text{অর্থাৎ} \quad x=-3\tfrac{5}{6}.$$

নাভিলম্ব পূর্বেই $\frac{1}{8}^0$ নির্ণীত হইয়াছে।

Ex. 3. *Prove that the length of any tangent to a parabola intercepted between its point of contact and the directrix subtends a right angle at the focus.*

শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং অধিবৃত্ত অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া, মনে কর, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$. ... ... (i)

তাহা হইলে, ইহার নাভিবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং নিয়ামক-রেখার সমীকরণ $x = -a$ ... ... (ii) হইবে।

যে-কোন বিন্দু $P(x_1, y_1)$ তে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$$yy_1 = 2a(x + x_1). \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

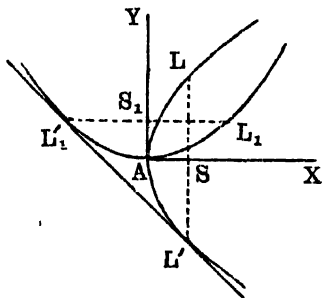
এই স্পর্শক-রেখা নিয়ামক-রেখা (ii) কে K বিন্দুতে ছেদ করিলে K বিন্দুর ভুজ $= -a$ এবং (iii) হইতে ইহার কোটি $= \frac{2a}{y_1}(-a + x_1)$ হইবে। এক্ষণে,

SP রেখার 'm' $= \frac{y_1 - 0}{x_1 - a} = \frac{y_1}{x_1 - a}$ এবং

SK রেখার 'm'', $= \dfrac{\frac{2a}{y_1}(x_1 - a) - 0}{-a - a} = -\frac{x_1 - a}{y_1} = m'$ ধর।

$$\therefore \quad mm' = \frac{y_1}{x_1 - a} \cdot \left(-\frac{x_1 - a}{y_1}\right) = -1.$$

অতএব, SP এবং SK সমকোণে নত অর্থাৎ, PK, S বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

Ex. 4. *Two equal parabolas have the same vertex, and their axes are at right angles; prove that their common tangent touches each at an end of its latus rectum.*

মনে কর, অধিবৃত্তের একটির সমীকরণ $y^2 = 4ax$ ... (i)
ইহার সমান দ্বিতীয় অধিবৃত্তটির নাভিলম্বও $4a$ হইবে এবং দ্বিতীয়ের শীর্ষবিন্দুও মূলবিন্দুরূপে মনোনীত A বিন্দুতে অবস্থিত হইবে। আবার, দ্বিতীয়টির অক্ষ প্রথমটির অক্ষের লম্ব হওয়ায় y-অক্ষ বরাবর অবস্থিত হইবে।

সুতরাং, দ্বিতীয় অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4ay$ (ii)

প্রথম অধিবৃত্তের $\left(\frac{a}{m^2}, 2am\right)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$y = mx + \frac{a}{m} \qquad \text{(iii)}$$

এই রেখা যদি দ্বিতীয় অধিবৃত্তেরও স্পর্শক হয়, তবে (ii) এবং (iii) এর ছেদ বিন্দুদ্বয় অভিন্ন হইবে, অর্থাৎ মিলিয়া যাইবে। সুতরাং, y অপনীত করিয়া প্রাপ্ত

$$x^2 - 4a\left(mx + \frac{a}{m}\right) = 0 \qquad \cdots \text{(iv)}$$

সমীকরণের দুইটি বীজ সমান হইবে। তাহা হইলে

$$(4am)^2 + 4 . \frac{4a^2}{m} = 0,$$

$$\text{বা,} \quad m^3 = -1. \quad \therefore \quad m = -1.$$

$\therefore$ এই দুই অধিবৃত্তের সাধারণ স্পর্শক $y = -x - a$,

বা, $x + y + a = 0$.

এখানে $m = -1$ বসাইয়া এই সাধারণ স্পর্শকের (i) সমীকরণ-নির্দেশিত অধিবৃত্তের উপরিস্থ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -2a)$ এবং ইহা স্পষ্টতঃই নাভিলম্বের L′ প্রান্তের স্থানাঙ্ক। (ii) সমীকরণ-নির্দেশিত অধিবৃত্তের উপরিস্থ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুর ভুজ $x = -2a$ [$\because$ (iv) সমীকরণের বীজদ্বয় সমান বলিয়া উহাদের সমষ্টি $4am = -4a$] এবং এই মান (ii) সমীকরণে বসাইলে $y = a$ হয়।

কিন্তু (ii) সমীকরণ-নির্দেশিত অধিবৃত্তের নাভিলম্বের L'_1 প্রান্তের স্থানাঙ্ক স্পষ্টতঃই $(-2a, a)$.

$\therefore$ অধিবৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক নাভিলম্ব দুইটির প্রত্যেকটির প্রান্তবিন্দুতে অধিবৃত্ত স্পর্শ করে।

Examples VI

1. Find the point on the parabola $y^2 = 18x$ at which the ordinate is three times the abscissa.

2. The parabola $y^2 = 4ax$ passes through the point $(2, -6)$. Find the length of its latus rectum.

3. Find the equation to the line joining the vertex to the positive end of the latus rectum of the parabola $y^2 = 8x$.

4. A double ordinate of the parabola $y^2 = 4ax$ is of length $8a$. Prove that the line joining the vertex to its two ends are at right angles. [*H. S. 1960*]

5. Find the latus rectum of the parabola whose focus is $(2, -3)$, and directrix is $5x - 12y + 6 = 0$.

6. Find the equation to the parabola

(i) whose focus is $(5, 3)$ and directrix is $3x - 4y + 1 = 0$.

(ii) whose focus is $(-6, -6)$ and vertex is $(-2, 2)$.

7. Find the vertex, focus and latus rectum of each of the parabolas (i) $y^2 = 4(x + y)$; (ii) $x^2 + 2y = 8x - 7$.

8. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=4ax$ at the extremity of the latus rectum. [*H. S. 1960*]

9. Find the equation to the tangent to the parabola

(i) $y^2=9x$ at the point whose ordinate is 6.

(ii) $y^2=12x$ at the positive extremity of the latus rectum.

10. Show that the foot of the perpendicular from the focus of the parabola $y^2=4ax$ on any tangent lies on the y-axis. [*H. S. 1961, Compartmental*]

11. Prove that the tangents at the extremities of the latus rectum of a parabola meet on the directrix, and are at right angles.

12. The two tangents drawn from a point P to the parabola $y^2=4x$ are at right angles. Find the locus of P.

13. (i) Prove that any two perpendicular tangents to the parabola $y^2=4ax$ intersect on the directrix.

(ii) If two tangents to a parabola are at right angles, show that their points of contact are at the extremities of a focal chord.

14. A tangent to the parabola $y^2=12x$ makes an angle of 45° with the axis. Find the co-ordinates of its point of contact.

15. A tangent to the parabola $y^2=4ax$ makes an angle 60° with the axis. Find its point of contact.

16. Find the equation to the tangent to the parabola $y^2=7x$ which is parallel to the straight line $x-4y-3=0$. Find also its point of contact.

17. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=8x$ which is perpendicular to $x+2y+7=0$.

18. Find the point on the parabola $y^2=8x$ at which the normal is inclined at an angle 60° with the positive direction of the x-axis.

19. Find the equation to the locus of the foot of the perpendicular from the vertex on the tangent at any point of the parabola $y^2=4ax$.

20. Find the equation to the chord of the parabola $y^2=8x$ which is bisected at the point $(2, -3)$.

21. Prove that the locus of the middle points of all chords of the parabola $y^2=4ax$ which are drawn through the vertex is the parabola $y^2=2ax$.

22. Find the length of the chord of the parabola $y^2=12x$ which is inclined at an angle of 45° with the axis, and passes through the point $(1, 3)$.

23. Find the length of the chord of the parabola $y^2=20x$ along the straight line $x-2y+4=0$.

24. Find the length of the normal chord of the parabola $y^2=4ax$ through an extremity of the latus rectum.

25. Find the middle point of the line $3y-4x=4$ intercepted by the parabola $y^2=8x$.

26. Prove that the product of the ordinates of the extremities of a focal chord of a parabola is constant, and deduce that the normals at the extremities of any focal chord are at right angles.

27. Prove that the normal chord of a parabola at the point whose ordinate is equal to its abscissa subtends a right angle at the focus.

28. Find the equation to the common tangent of the parabolas $y^2=32x$ and $x^2=4y$.

29. Prove that the common tangents of the parabola $y^2=4ax$ and the circle $x^2+y^2-2ax=3a^2$ are both inclined at 30° to the x-axis.

30. Show that the sum of the ordinates of the extremities of any one of a parallel system of chords of a parabola is constant.

ANSWERS

1. $(2, 6)$. **2.** 18. **3.** $y=2x$. **5.** 8.

6. (i) $25\{(x-5)^2+(y-3)^2\}=(3x-4y+1)^2$.

(ii) $4x^2-4xy+y^2+104x+148y-124=0$.

7. (i) $(-1, 2)$; $(0, 2)$; 4. (ii) $(4, 4\frac{1}{2})$; $(4, 4)$; 2. **8.** $y=\pm(x+a)$.

9. (i) $3x-4y+12=0$. (ii) $y=x+3$. **12.** $x=-1$. **14.** $(3, 6)$.

15. $\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$. **16.** $x-4y+28=0$; $(28, 14)$. **17.** $y=2x+1$.

18. $(6, -4\sqrt{3})$. **19.** $x(x^2+y^2)+ay^2=0$. **20.** $4x+3y+1=0$.

22. $4\sqrt{6}$. **23.** 80. **24.** $8a\sqrt{2}$. **25.** $(\frac{4}{4}, 3)$.

28. $2x+y+4=0$.

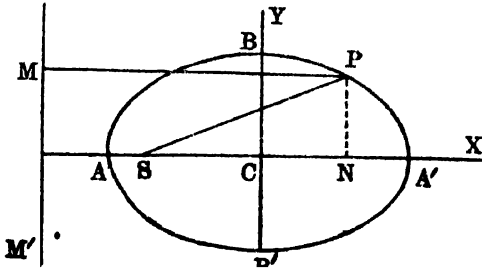
সপ্তম অধ্যায়

উপবৃত্ত (Ellipse)

7·1. উপবৃত্ত (Ellipse).

যদি কোন সমতলে একটি চলন্ত বিন্দু এভাবে চলাফেরা করে যে, ঐ সমতলস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু এবং এক নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ইহার দুই দূরত্বের অনুপাত সতত ধ্রুবক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে উপবৃত্ত বলা হয়।

নির্দিষ্ট বিন্দু উপবৃত্তের নাভি, নির্দিষ্ট সরলরেখা ইহার নিয়ামক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এই অনুপাত ইহার উৎকেন্দ্রতা নামে অভিহিত।

7·2. উপবৃত্তের আদর্শ-সমীকরণ।

মনে কর, উপবৃত্তের নাভিবিন্দু S, MM′ ইহার নিয়ামক এবং $e\ (<1)$ ইহার নির্দিষ্ট উৎকেন্দ্রতা।

S বিন্দু হইতে MM′-এর উপর SZ লম্ব টান এবং SZ-কে A ও A′ বিন্দুতে $e:1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত কর। যেহেতু $e<1$, $SA' < A'Z$. সুতরাং, নিয়ামক-রেখা MZM′-এর যে পার্শ্বে A অবস্থিত A′ সেই পার্শ্বে এবং (উপরের চিত্রের মত) S বিন্দুর দক্ষিণ পার্শ্বে অবস্থিত অর্থাৎ S বিন্দু A ও A′ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

$$\text{এক্ষণে, } SA = e.AZ \text{ এবং } SA' = e.A'Z.$$

সুতরাং, উপবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে A ও A′ বিন্দু দুইটি উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত। মনে কর, AA′-এর মধ্যবিন্দু C.

এখন, $SA+SA'=e(AZ+A'Z)$

বা, AA′ অর্থাৎ $2.CA=e.2CZ$ বা, $CA=e.CZ$

এবং $SA'-SA=e(A'Z-AZ)$

বা, $2CS=e.AA'=e.2CA$, বা, $CS=e.CA$.

$CA=CA'=a$, ধর। তাহা হইলে, $CZ=\frac{a}{e}$ এবং $CS=ae$.

এখন মনে কর, C মূলবিন্দু, AA′ বরাবর CX রেখা x-অক্ষ এবং C বিন্দুগামী AA′-এর লম্ব B′CB বরাবর CY রেখা y-অক্ষ। মনে কর, উপবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক (x, y), P বিন্দু হইতে x-অক্ষ AA′-এর উপর লম্ব PN এবং নিয়ামক MM′-এর উপর লম্ব PM.

সুতরাং, $CN=x$, $PM=ZN=ZC+CN=\frac{a}{e}+x$.

$\because$ $CS=ae$, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$.

$\therefore$ উপবৃত্তের ধর্মানুযায়ী, $SP=e.PM$ বা, $SP^2=e^2.PM^2$.

$$\therefore\ (x+ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}+x\right)^2.$$

বা, $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$ $[\because e<1]$

বা, $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ **[যখন $\mathbf{b^2=a^2(1-e^2)}$]** ... (i)

উপবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু P-র স্থানাঙ্ক এই শর্ত সিদ্ধ করে বলিয়া ইহাই উপবৃত্তের আদর্শ-আকারের সমীকরণ।

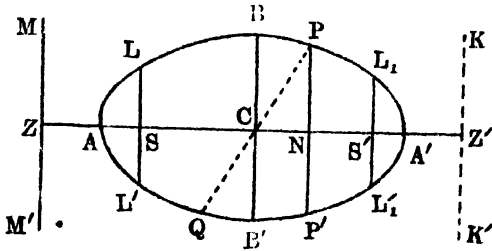
এখানে, উপবৃত্তের কেন্দ্র নামে অভিহিত AA′-এর মধ্যবিন্দু C মূলবিন্দু, $CA=CA'=\frac{1}{2}AA'=a$ এবং $b^2=a^2(1-e^2)$.

7·3. উপবৃত্তের আকৃতি ও মৌলিক ধর্ম।

উপবৃত্তের $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণ হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, x-এর যে-কোন একটি মান হইলে y-এর দুইটি সমান ও বিপরীত চিহ্নযুক্ত

মান $\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ পাওয়া যায়। সুতরাং, AA′-এর কোন লম্বরেখার উপর AA′-এর একপার্শ্বে অবস্থিত P বিন্দুর প্রতিসম আর এক বিন্দু P′, AA′-এর অপরপার্শ্বে আছে। সুতরাং, উপবৃত্তের AA′-এর লম্ব সকল জ্যা AA′ কর্তৃক সমদ্বিখণ্ডিত। সুতরাং, উপবৃত্ত x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

অনুরূপভাবে, y-এর একটি মান হইতে x-এর দুইটি সমান এবং বিপরীত মান পাওয়া যায়। সুতরাং, উপবৃত্ত y-অক্ষেরও উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

অতএব, x-অক্ষের উপর CS′ = CS এবং CZ′ = CZ করিয়া C বিন্দুর অপরপার্শ্বে যদি দুইটি বিন্দু S′, Z′ লওয়া যায়, এবং নিয়ামক MZM′-এর সমান্তরাল করিয়া KZ′K′ যদি অঙ্কন করা যায়, তবে BCB′ রেখার উভয় পার্শ্বে উপবৃত্ত প্রতিসম বলিয়া S′ নাভি, KK′ নিয়ামক এবং e উৎকেন্দ্রতা ধরিয়াও উপবৃত্তটি অঙ্কন করা যায়। সুতরাং, C বিন্দুর অপরপার্শ্বে প্রতিসমরূপে অবস্থিত উপবৃত্তের দ্বিতীয় এক নাভি S′ এবং দ্বিতীয় এক নিয়ামক KZ′K′ আছে।

আবার, $y=0$ হইলে উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে আমরা $x=\pm a$ পাই। সুতরাং, উপবৃত্ত x-অক্ষকে A′ এবং A বিন্দুতে ছেদ করে এবং এই দুই বিন্দুর ভুজ যথাক্রমে a এবং $-a$. অনুরূপভাবে, $x=0$ হইলে আমরা $y=\pm b$ পাই। সুতরাং, উপবৃত্ত y-অক্ষকে B এবং B′ বিন্দুতে ছেদ করে এবং এই দুই বিন্দুর কোটি যথাক্রমে b এবং $-b$. অতএব, CB = CB′ = b (দৈর্ঘ্যে)। অধিকন্তু, $x>a$ অথবা $<-a$ হইলে, $\frac{x^2}{a^2}>1$ এবং y^2 ঋণাত্মক হইবে। সুতরাং, y কাল্পনিক। অতএব, A′ বিন্দুর দক্ষিণপার্শ্বে অথবা A বিন্দুর বামপার্শ্বে উপবৃত্তের কোন অংশ নাই। অনুরূপভাবে, যদি $y>b$ অথবা $y<-b$ হয়, x কাল্পনিক হইবে। অতএব, B বিন্দুর উপরে অথবা B′ বিন্দুর

নীচে উপবৃত্তের কোন অংশ নাই। সুতরাং, উপবৃত্ত সর্বদিকেই সীমাবদ্ধ এবং সীমায়িত একটি বক্ররেখা।

পরিশেষে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপর একটি বিন্দু P (x_1, y_1) যদি অবস্থিত হয় অর্থাৎ (x_1, y_1) উপবৃত্তের সমীকরণ সিদ্ধ করে, তবে P-র কোণাকুণি বিপরীত বিন্দু Q $(-x_1, -y_1)$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে এবং PQ রেখা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। অতএব, AA′ বা BB′ এর মধ্যবিন্দু C এর উভয় পার্শ্বে উপবৃত্ত প্রতিসম। এই কারণেই C বিন্দুকে উপবৃত্তের কেন্দ্র বলা হয়।

x-অক্ষ বরাবর $2a$ পরিমিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট AA′ কে উপবৃত্তের **পরাক্ষ** (major axis) বলা হয়;

এবং y-অক্ষ বরাবর $2b$ পরিমিত দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট BB′ কে উপবৃত্তের **উপাক্ষ** (minor axis) বলা হয়।

পরাক্ষের লম্ব অর্থাৎ নিয়ামকের সমান্তরাল উপবৃত্তের S নাভিবিন্দুগামী LSL′ জ্যা-কে বা S′ নাভিবিন্দুগামী $L_1S'L'_1$ জ্যা-কে উপবৃত্তের **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলা হয়। BB′ উপাক্ষ-রেখার উভয় পার্শ্বে উপবৃত্ত প্রতিসম বলিয়া LSL′ এবং $L_1S'L'_1$ জ্যা-দ্বয় পরস্পর সমান।

যেহেতু $CS'=ae$, নাভিলম্বের L_1 বা L'_1 প্রান্তের ভুজ $=ae$. সুতরাং, উপবৃত্তের $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণে $x=ae$ বসাইলে y এর মান অর্থাৎ L_1 বা L'_1 প্রান্তবিন্দুর কোটি পাওয়া যাইবে।

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\therefore\quad y=\pm b\sqrt{1-e^2}=\pm a(1-e^2).$$

অতএব, উপবৃত্তের নাভিলম্ব $L_1L'_1$ বা LL′ এর দৈর্ঘ্য

$$=\mathbf{2a(1-e^2)=2\frac{b^2}{a}}.$$

$\therefore$ নাভিলম্বার্ধ $=\frac{b^2}{a}=a(1-e^2)$.

নাভিলম্বের L_1 প্রান্তের স্থানাঙ্ক $\{ae, a(1-e^2)\}$.

নিম্ন সমীকরণ হইতে উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা পাওয়া যায়

$\therefore\ b^2 = a^2(1-e^2)$, বা, $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$

উপবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দু P-র নাভিবিন্দুদ্বয় S, S′ হইতে দূরত্ব SP, S′P.

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) আবার নাভিবিন্দু S′ এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$.

$$\therefore\quad S'P^2 = (x_1 - ae)^2 + y_1^2 = (x_1 - ae)^2 + b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right).$$

[উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে]

$$= (x_1 - ae)^2 + (1 - e^2)(a^2 - x_1^2)$$

[$\because\ b^2 = a^2(1-e^2)$]

$$= e^2x_1^2 - 2x_1ae + a^2 = (a - ex_1)^2.$$

$\therefore$ $\mathbf{S'P = a - ex_1}$, এবং ইহাই S′P র ধনাত্মক মান

[$\because\ x_1 < a$ এবং $e < 1$].

অনুরূপভাবে, $\mathbf{SP = a + ex_1}$.

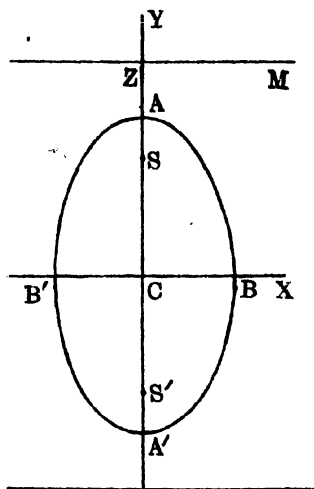
অতএব, $SP + S'P = 2a =$ পরাক্ষের দৈর্ঘ্য। সুতরাং, এই সম্পর্ক হইতে আমরা উপবৃত্তের নিম্নলিখিত প্রধান ধর্ম পাই।

নাভিবিন্দুদ্বয় হইতে উপবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক এবং পরাক্ষের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত। নাভিবিন্দু হইতে উপাক্ষের এক প্রান্তবিন্দুর দূরত্ব পরাক্ষের অর্ধেক।

দ্রষ্টব্য 1. উপবৃত্তচিত্রের সম্পূর্ণ অংশ উপাক্ষ BCB′ এর উভয় পার্শ্বে প্রতিসম হওয়ার জন্য সুবিধাজনক বলিয়া, এখন হইতে সর্বসম্মত নিয়মানুযায়ী উপবৃত্তের দক্ষিণ নাভিবিন্দু $(ae, 0)$ S দ্বারা, দক্ষিণ শীর্ষবিন্দু $(a, 0)$ A দ্বারা, $x = \frac{a}{e}$ দ্বারা সূচিত দক্ষিণ নিয়ামক MZM′ দ্বারা এবং বাম নাভিবিন্দু $(-ae, 0)$ S′ দ্বারা, বাম শীর্ষবিন্দু A′ দ্বারা ও $x = -\frac{a}{e}$ দ্বারা সূচিত বাম নিয়ামক KZ′K′ দ্বারা নির্দেশ করা হইবে।

দ্রষ্টব্য 2. **উপবৃত্ত** $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,\ a > b.$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি অক্ষদ্বয় পরস্পর পরিবর্তিত করা যায় অর্থাৎ x-অক্ষকে y-অক্ষ এবং y-অক্ষকে x-অক্ষ ধরা যায়, তবে সমীকরণটি $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, বা, $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ হয়। এখানে, $a>b$ হওয়ায় $2a$ দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং $2b$ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর হইবে। নাভিবিন্দুদ্বয় পরাক্ষের উপর অর্থাৎ y-অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক $(0, \pm\sqrt{a^2-b^2})$ হইবে। পূর্বের ন্যায় উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{a^2-b^2}/a$. নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের (এখানে x-অক্ষের) সমান্তরাল বলিয়া ইহাদের সমীকরণ $y=\pm\frac{a}{e}$.

7·4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরিস্থ নির্দিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (i) উপবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং সন্নিহিত অপর এক বিন্দু Q এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2).

তাহা হইলে, PQ জ্যা-র সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \cdots \quad (ii)$$

এক্ষণে, উভয় বিন্দু P, Q (i) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত হওয়ায়

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (iii)$$

এবং $$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (iv)$$

এখন (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিলে,

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0, \text{ বা, } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}.$$

$\therefore$ (ii) সমীকরণ নিম্নপ্রকারে লেখা যায়

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1). \quad \cdots \quad (v)$$

এখন, P বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ রেখাকে এমনভাবে ঘুরাইতে থাক, যেন Q বিন্দু ক্রমশঃ P বিন্দুর নিকটবর্তী হইতে হইতে শেষপর্যন্ত P বিন্দুর সহিত একেবারে মিশিয়া যায়। সুতরাং, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এর সহিত অভিন্ন হইয়া যাইবে এবং তখন PQ সরলরেখা P বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং (v) হইতে উহার সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

বা, $$(y-y_1)\frac{y_1}{b^2}+\frac{x_1}{a^2}(x-x_1)=0,$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1. \quad [\text{(iii) এর সাহায্যে}]$$

$\therefore$ (i) উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.}$$

7·5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

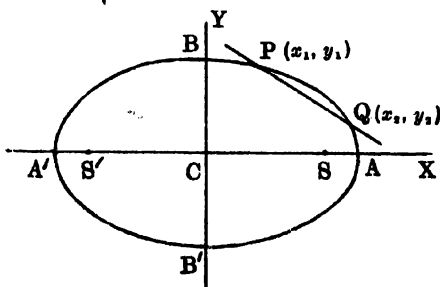
$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$$

বা, $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$ এবং ইহার 'm' $= -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$.

(x_1, y_1) বিন্দুগামী অভিলম্ব স্পর্শকের লম্ব হওয়ায় ইহার 'm' $= \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}$ হইবে।

∴ অভিলম্বের সমীকরণ হইবে

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1), \qquad \text{বা,} \quad \frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$$

7·6. $y = mx + c$ সরলরেখা কর্তৃক $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য।

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সহিত $y = mx + c$ সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়। সুতরাং, সমীকরণ দুইটি হইতে y অপনীত করিয়া যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহা হইতে ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যাইবে,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx + c)^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{বা,} \quad x^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) + \frac{2mc}{b^2}\cdot x + \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0. \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ এবং x এর কেবলমাত্র দুইটি বীজ আছে। সুতরাং, উপবৃত্তের সহিত প্রদত্ত সরলরেখার মাত্র দুইটি ছেদবিন্দু আছে এবং এই দুইটি বিন্দু বাস্তব, অভিন্ন অথবা কাল্পনিক হইতে পারে।

মনে কর, ঐ দুইটি ছেদবিন্দু P, Q এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2). তাহা হইলে x_1 ও x_2 (i) সমীকরণের বীজ।

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{b^2} \bigg/ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = -\frac{2mca^2}{a^2m^2 + b^2}$$

এবং $$x_1 x_2 = \left(\frac{c^2}{b^2} - 1\right) \bigg/ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) = \frac{a^2(c^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2}.$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{4m^2c^2a^4}{(a^2m^2 + b^2)^2} - \frac{4a^2(c^2 - b^2)}{a^2m^2 + b^2}$$

$$= \frac{4a^2\{m^2c^2a^2 - (c^2 - b^2)(a^2m^2 + b^2)\}}{(a^2m^2 + b^2)^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}.$$

আবার, P, Q প্রদত্ত রেখার উপর অবস্থিত বলিয়া

$$y_1 = mx_1 + c, \; y_2 = mx_2 + c. \quad \therefore \; y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

$\therefore$ PQ জ্যা-র দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + m^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2b^2(a^2m^2 + b^2 - c^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 + b^2)^2}}$$

$$= \frac{\mathbf{2ab\sqrt{1 + m^2}\sqrt{a^2m^2 + b^2 - c^2}}}{\mathbf{a^2m^2 + b^2}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। স্পর্শক হইবার শর্ত।

যখন উপবৃত্তের সহিত প্রদত্ত রেখার ছেদবিন্দু দুইটির একটি অপরটির সহিত একেবারে মিলিয়া যায় অর্থাৎ যখন ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য 0 হয়, একমাত্র তখনই রেখাটি উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে। সুতরাং, প্রদত্ত রেখা $y = mx + c$ উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ কে স্পর্শ করার শর্ত $a^2m^2 + b^2 - c^2 = 0$

অর্থাৎ $\mathbf{c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$.

7·7. m এর যে-কোন মান হইলে $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে তাহার প্রমাণ ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয়।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \text{ অথবা } y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1} \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

যদি $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখা ··· (ii) উপবৃত্তকে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে (i) এবং (ii) সমীকরণ অভিন্ন হইবে। সুতরাং, এই দুই সমীকরণের সহগগুলি তুলনা করিলে

$$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=m \text{ এবং } \frac{b^2}{y_1}=\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

$$y_1=\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ x_1=-\frac{a^2my_1}{b^2}=-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}.$$

∴ কল্পিত বিন্দু (x_1, y_1) যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের উপরিস্থ একটি বাস্তব বিন্দু হয়, তবেই (ii) সমীকরণ-সূচিত সরলরেখা উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে,

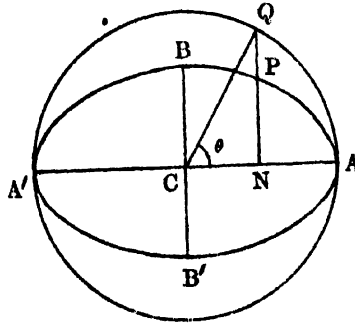
অর্থাৎ, যদি $\left(-\frac{am}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)^2=1$ হয়;

এবং সুস্পষ্টরূপেই ইহা সিদ্ধ।

অতএব, 'm' এর মান যাহাই হউক না কেন $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করিবে, এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) যথাক্রমে $\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$ হইবে।

অনুরূপভাবে, m এর যে কোন মান হইলে $y=mx-\sqrt{a^2m^2+b^2}$ সরলরেখাও $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) \text{ হইবে।}$$

7·8. সহায়ক বৃত্ত Auxiliary Circle))

কোন উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস ধরিয়া উহার উপর অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত বলে।

বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু C এবং পরাক্ষার্ধ a বৃত্তের ব্যাসার্ধ হওয়ায় সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ হইবে

$$x^2+y^2=a^2.$$

মনে কর, উপবৃত্তের একটি কোটি PN কে বর্ধিত করিলে সহায়ক বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহা হইলে, P বিন্দুর ভুজ x, CN দ্বারা গঠিত হওয়ায় উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হইতে উপবৃত্তের কোটি

$$PN=y=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

আবার, সহায়কবৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=a^2$ হইতে ভুজ $CN=x$ হওয়ায় QN কোটি $=\sqrt{a^2-x^2}$.

$$\text{অতএব,}\quad \frac{PN}{QN}=\frac{b}{a}.$$

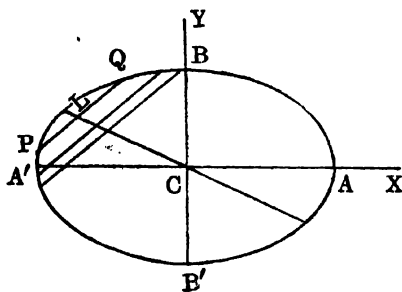
সুতরাং, "উপবৃত্তের কোন বিন্দুর কোটি এবং উহার সহায়ক বৃত্তের অনুরূপ বিন্দুর কোটির অনুপাত সতত অপরিবর্তিত থাকে এবং এই অনুপাত উপবৃত্তের উপাক্ষ এবং পরাক্ষের অনুপাতের সমান।

দ্রষ্টব্য। উপবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক একমাত্র চলের সাহায্যে প্রকাশ। উপবৃত্তের উপরিস্থ বিন্দুর **উৎকেন্দ্রিক কোণ।**

মনে কর, $\angle QCN = \theta$. যেহেতু $CQ = a$, $CN = a\cos\theta$ এবং $NQ = a\sin\theta$.

$$\therefore \quad NP = \frac{b}{a}\cdot NQ = \frac{b}{a}\cdot a\sin\theta = b\sin\theta.$$

অতএব, উপবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক একমাত্র চল θ-র সাহায্যে **$a\cos\theta$, $b\sin\theta$** রূপে লেখা যায়। θ কে উপবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর উৎকেন্দ্রিক কোণ বলা হয়।

7·9. উপবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ ; ব্যাস।

মনে কর, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ··· (i) উপবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-র অন্যতম PQ রেখা $y = mx + c$ ··· (ii) দ্বারা সূচিত।

জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া সকল জ্যা-র ক্ষেত্রে 'm' অপরিবর্তিত, কিন্তু ভিন্ন ভিন্ন জ্যার ক্ষেত্রে c র ভিন্ন ভিন্ন মান হইবে।

(i) এবং (ii) সমীকরণ হইতে y অপনীত করিলে যে সমীকরণ পাওয়া যায় সেই সমীকরণের বীজ হইতে PQ রেখার সহিত উপবৃত্তের ছেদবিন্দু-দ্বয়ের ভুজ পাওয়া যাইবে,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0.$ ··· (iii)

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) যদি P, Q ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক হয়, তবে x_1, x_2 (iii) সমীকরণের বীজ হইবে।

সুতরাং, (X, Y) যদি PQ এর মধ্যবিন্দু L এর স্থানাঙ্ক হয়, তবে

$$X = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{a^2mc}{a^2m^2 + b^2}.$$

আবার, $\because$ L, (ii) সমীকরণ-সূচিত রেখার উপর একটি বিন্দু,

$$Y = mX + c.$$

$\therefore$ c অপনীত করিয়া

$$Y = mX - \frac{a^2m^2 + b^2}{a^2m}X = -\frac{b^2}{a^2m}X,$$

এবং ইহা c-নিরপেক্ষ হওয়ায় এই প্রস্থের সকল সমান্তরাল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে এই শর্ত প্রযোজ্য।

$\therefore$ $y = mx$ সরলরেখার সমান্তরাল উপবৃত্তের দ্বিতীয় জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ

$$\mathbf{y = -\frac{b^2}{a^2m}x},$$

এবং ইহা সুস্পষ্টরূপে মূলবিন্দু অর্থাৎ উপবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুগামী একটি সরলরেখা।

এই সরলরেখা উপবৃত্তের **ব্যাস** নামে অভিহিত। 'm' এর ভিন্ন ভিন্ন মানের ক্ষেত্রে (অর্থাৎ পরাক্ষের সহিত বিভিন্ন কোণে নত ভিন্ন ভিন্ন প্রস্থ জ্যা-র ক্ষেত্রে) আমরা উপবৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী বিভিন্ন ব্যাস পাই।

7·10. উদাহরণাবলী।

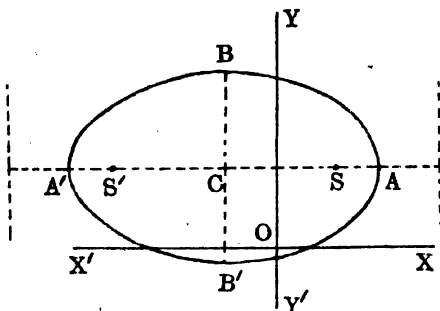
Ex. 1. *Show that the equation $5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0$ represents an ellipse, and find its eccentricity, latus rectum and co-ordinates of the foci. Find also the equations to its directrices.*

প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$5(x^2 + 2x) + 9(y^2 - 4y) = 4, \quad \text{বা,} \quad 5(x+1)^2 + 9(y-2)^2 = 45,$$

অর্থাৎ, $$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1.$$

মূলবিন্দু $(-1, 2)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত করিলে উপরের সমীকরণটি নিম্নের আকারে পরিণত হয়

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \text{(i)}$$

কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া ইহাই উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

সুতরাং, (i) সমীকরণের সহিত আদর্শ সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর তুলনা করিলে (i) সমীকরণের ক্ষেত্রে আমরা দেখিতে পাই $a^2 = 9$ এবং $b^2 = 5$.

অতএব, প্রদত্ত উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{9-5}{9}} = \frac{2}{3};$$

$$\text{নাভিলম্ব} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2.5}{3} = 3\frac{1}{3}.$$

কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিয়া নাভিবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক

$(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ $(\pm 3.\frac{2}{3}, 0)$ অর্থাৎ $(\pm 2, 0)$.

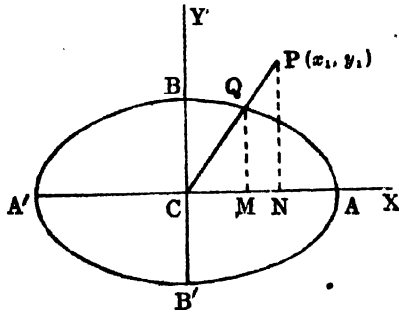
সুতরাং, পূর্বতন অক্ষানুযায়ী নাভিবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক

$(-1+2, 2+0)$ এবং $(-1-2, 2+0)$

অর্থাৎ $(1, 2)$ এবং $(-3, 2)$.

এবং কেন্দ্রকে মূলবিন্দু ধরিলে নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ

$x = \pm \frac{a}{e}$ বা $x = \pm \frac{3}{\frac{2}{3}} = \pm \frac{9}{2}$. সুতরাং, পূর্বতন অক্ষানুযায়ী নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x = \pm \frac{9}{2} - 1$, অর্থাৎ $x = \frac{7}{2}$ এবং $x = -\frac{11}{2}$.

Ex. 2. *Prove that the point (x_1, y_1) is inside or outside the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *according as* $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$ or >1.

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং কেন্দ্রের সহিত সংযোগকারী রেখা CP উপবৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $\frac{CP}{CQ}=\lambda$ হয় তবে $\lambda>1$ হইলে P উপবৃত্তের বাহিরে এবং $\lambda<1$ হইলে, P উপবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হইবে।

এক্ষণে, PN এবং QM x-অক্ষ CAX এর উপর লম্ব হইলে,

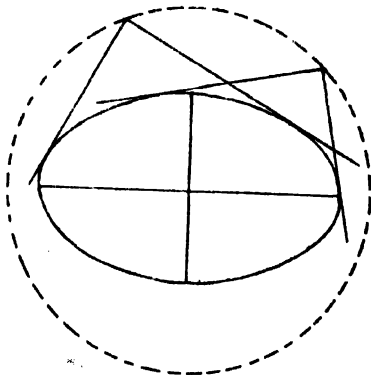
$$x_1=CN,\ y_1=NP \text{ এবং } \frac{CM}{CN}=\frac{MQ}{NP}=\frac{CQ}{CP}=\frac{1}{\lambda}.$$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচক CM এবং MQ যথাক্রমে $\frac{x_1}{\lambda}$ এবং $\frac{y_1}{\lambda}$. Q উপবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া ইহার স্থানাঙ্ক উপবৃত্তের সমীকরণ সিদ্ধ করিবে।

$$\therefore\quad \frac{x_1^2}{\lambda^2a^2}+\frac{y_1^2}{\lambda^2b^2}=1 \text{ বা } \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=\lambda^2.$$

অতএব, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$ হইলে P বিন্দু উপবৃত্তের বাহিরে এবং $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$ হইলে P বিন্দু উপবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হইবে।

Ex. 3. *Prove that the locus of the point of intersection of any two perpendicular tangents to an ellipse is a circle.*

মনে কর, একটি উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ··· (i)

$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ··· (ii) রেখা (i) উপবৃত্তের একটি স্পর্শক। এই স্পর্শকের সমীকরণে 'm' এর পরিবর্তে $-\frac{1}{m}$ লিখিলে ইহার সহিত লম্বভাবে অবস্থিত স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়।

অতএব, লম্ব-স্পর্শকের সমীকরণ

$$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2} \quad \text{বা,} \quad my=-x+\sqrt{a^2+b^2m^2}. \quad \text{(iii)}$$

(ii) এবং (iii) এর ছেদবিন্দুতে উভয় সমীকরণই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়। সুতরাং, এই দুই সমীকরণ হইতে 'm' অপনীত করিয়া যে শর্ত পাওয়া যায় তাহা এইপ্রকার প্রত্যেক জোড়া লম্ব-স্পর্শকের ছেদবিন্দুতে সিদ্ধ হয়। অতএব, এই শর্তই নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে।

(ii) ও (iii) হইতে আমরা পাই

$$y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

এবং $my+x=\sqrt{a^2+b^2m^2}.$

উভয়ের বর্গ করতঃ যোগ করিয়া

$$(x^2+y^2)(1+m^2)=(a^2+b^2)(1+m^2).$$

$$\therefore \quad \mathbf{x^2+y^2=a^2+b^2.}$$

এই সমীকরণ মূলবিন্দুতে অর্থাৎ উপবৃত্তের কেন্দ্রে কেন্দ্রবিশিষ্ট এক বৃত্ত সূচিত করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত।

দ্রষ্টব্য। এই বৃত্তকে উপবৃত্তের **নিয়ামক বৃত্ত (director circle)** বলে।

Ex. 4. *Find the length of the chord of the ellipse* $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ *whose middle point is* $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.

মনে কর, $(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ বিন্দুতে মধ্যবিন্দু আছে এইরূপ PQ জ্যা-র সমীকরণ

$$y-\tfrac{2}{5}=m(x-\tfrac{1}{2}), \quad \text{বা,} \quad y=mx+\frac{4-5m}{10}. \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \cdots$ (ii) উপবৃত্তের সহিত PQ রেখার ছেদবিন্দু P ও Q এর ভুজ (i) ও (ii) হইতে y অপনীত করিয়া নিম্ন সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{x^2}{25}+\frac{1}{16}\left(mx+\frac{4-5m}{10}\right)^2=1,$$

$$\text{বা,} \quad (16+25m^2)x^2+5m(4-5m)x+\frac{(4-5m)^2-1600}{4}=0 \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এক্ষণে, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) যদি P এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক হয়, তবে x_1, x_2 (iii) সমীকরণের বীজ হইবে।

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{5m(4-5m)}{16+25m^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iv)}$$

$$\text{এবং} \quad x_1x_2=\frac{(4-5m)^2-1600}{4(16+25m^2)}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(v)}$$

কিন্তু PQ রেখার মধ্যবিন্দুর ভুজ দেওয়া আছে $\frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}(x_1+x_2)=\tfrac{1}{2}, \quad \text{বা,} \quad x_1+x_2=1.$$

$$\therefore \quad \text{(iv) হইতে} \; -5m(4-5m)=16+25m^2. \quad \therefore \quad m=-\tfrac{4}{5}.$$

$$\therefore \quad \text{(v) হইতে } x_1x_2 = \frac{64-1600}{4.32} = -12.$$

$$\therefore \quad (x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1+48 = 49. \quad \cdots \text{(vi)}$$

উভয় বিন্দু P এবং Q (i) রেখার উপর অবস্থিত বলিয়া

$$y_1 - \tfrac{2}{5} = m(x_1 - \tfrac{1}{2}), \quad y_2 - \tfrac{2}{5} = m(x_2 - \tfrac{1}{2}).$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) = -\tfrac{4}{5}(x_1 - x_2).$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2(1+\tfrac{16}{25})}$$
$$= \sqrt{49 \times \tfrac{41}{25}} = \tfrac{7}{5}\sqrt{41}.$$

Ex. 5. *Prove that in the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, *if the line* $y=m'x$ *bisects all chords parallel to* $y=mx$, *then* $y=mx$ *bisects all chords parallel to* $y=m'x$.

§ 7·9 অনুসারে আমরা জানি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$ ব্যাস, $y=mx$ রেখার সমান্তরাল উপবৃত্তের সমস্ত জ্যা-র সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং, এই সমদ্বিখণ্ডক ব্যাস যদি $y=m'x$ হয়, তবে $m'=-\frac{b^2}{a^2m}$ বা, $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ ···(i) এবং ইহাই $y=m'x$ রেখা $y=mx$ রেখার সমান্তরাল সকল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবার শর্ত।

অনুরূপভাবে, $y=mx$ রেখা $y=m'x$ রেখার সমান্তরাল সকল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবার শর্ত $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$ এবং ইহা (i) এর সহিত অভিন্ন।

সুতরাং, যদি $y=m'x$ রেখা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $y=mx$ রেখার সমান্তরাল সকল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে $y=mx$ রেখাও $y=m'x$ রেখার সমান্তরাল উপবৃত্তের সকল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। উভয় ক্ষেত্রেই সমদ্বিখণ্ডিত করিবার শর্ত $\mathbf{mm'=-\frac{b^2}{a^2}}$.

অতএব, যদি উপবৃত্তের কোন ব্যাস উপবৃত্তের অপর এক ব্যাসের সমান্তরাল যাবতীয় জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে শেষোক্ত ব্যাসও পূর্বোক্ত ব্যাসের সমান্তরাল উপবৃত্তের যাবতীয় জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

এইপ্রকার দুইটি ব্যাসকে উপবৃত্তের **অনুবন্ধী ব্যাস (conjugate diameters)** বলা হয়।

Examples VII

1. (i) Find out the eccentricity, and the co-ordinates of the foci of the ellipse $9x^2+25y^2=225$. [*H. S. 1960*]

(ii) Find the co-ordinates of the foci of the ellipse $9x^2+5y^2=45$.

2. An ellipse has its major axis along the x-axis and minor axis along the y-axis. Its eccentricity is $\frac{1}{2}$ and the distance between the foci is 4. Find its equation and show that the ellipse passes through the point (2, 3).

[*H. S. 1961 ; Compartmental*]

3. (i) Find the equation to the ellipse whose centre is the origin, whose axes are the axes of co-ordinates, and which passes through the points $(-3, \frac{16}{5})$ and $(0, -4)$. Find also the co-ordinates of its foci.

(ii) An ellipse having centre as origin and axes along the co-ordinate axes, passes through the points $(\frac{8}{3}, -3)$ and $(-\sqrt{6}, 2)$. Find the equations to its directrices.

4. Find the equation to the ellipse having centre as origin, and axes along the axes of co-ordinates, whose latus rectum is 6 and eccentricity $\frac{1}{2}$. Write down the co-ordinates of the extremities of its minor axis.

5. (i) The latus rectum of an ellipse is half its major axis. Find its eccentricity.

(ii) The distance between the focus and directrix of an ellipse is 16 inches and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Obtain the lengths of its principal axes.

6. Find the equation to the ellipse whose focus is $(-1, 1)$, eccentricity is $\frac{1}{2}$ and the directrix is $x-y+3=0$.

7. Find the latus rectum, eccentricity and co-ordinates of the centre and foci of the ellipse :

(i) $3x^2+4y^2+6x-8y=5$. (ii) $9x^2+5y^2-30y=0$.

8. Is the point (i) $(2, -1\frac{1}{2})$, (ii) $(2, -1)$, inside or outside the ellipse $4x^2+9y^2=36$?

9. Find the equation to the tangent of the ellipse $9x^2+16y^2=144$ having equal positive intercepts on the axes.

[*H. S. 1961*]

10. Find the distance from the origin of the point where the tangent at the extremity of a latus rectum of the ellipse $9x^2+25y^2=225$ intersects the major axis. [*H. S. 1960*]

11. Show that $x-3y=13$ touches the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

What are the co-ordinates of the point of contact ?

[*H. S. 1960 ; Compartmental*]

12. Find the equations to the tangents to the ellipse $9x^2+16y^2=36$ which are parallel to $3x-3y+7=0$, and find out the points of contact.

13. If a tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intercepts lengths α and β along the axes, prove that $\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}=1$.

14. Prove that the product of the perpendiculars from the foci on any tangent to an ellipse is constant and equal to the square on the semi-minor axis.

15. The straight line $3x-5y+25=0$ touches an ellipse whose principal axes are along the axes of co-ordinates, and whose eccentricity is given to be $\frac{3}{5}$. Find the distance between the foci of the ellipse.

16. Find the equation to the normal to the ellipse $2x^2+7y^2=71$ at $(2, -3)$ and determine the distance of the point where it intersects the major axis, from the foot of the ordinate.

17. Write down the equation to the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ at an extremity of the latus-rectum, and show that if it passes through an extremity of the minor axis, the eccentricity of the ellipse is given by $e^2=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

18. If the normal to the ellipse $x^2+3y^2=12$ at a point be inclined at 60° to the major axis, show that the line joining the centre to the point is inclined at 30° to the same axis.

19. Obtain the equation to the chord of the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ which is bisected at the point $(2, -1)$.

20. Find the length of the chord of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=$ intercepted by the line $x+y=3$. What are the co-ordinate of its middle point ?

21. Find the equation to the diameter of the ellipse $6x^2+9y^2=1$ bisecting all chords parallel to $y=x$.

22. Show that the straight lines $3y=4x$ and $x+3y=0$ each bisects all chords of the ellipse $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ parallel to the other.

ANSWERS

1. (i) $\frac{4}{5}$; $(\pm 4, 0)$. (ii) $(0, \pm 2)$. **2.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

3. (i) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; $(\pm 3, 0)$. (ii) $y=\pm 4\sqrt{3}$. **4.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; $(0, \pm 2\sqrt{3})$.

5. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (ii) 30 inches, 24 inches.

6. $8\{(x+1)^2+(y-1)^2\}=(x-y+3)^2$.
or, $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$. **7.** (i) 3; $\frac{1}{2}$; $(-1, 1)$; $(0, 1)$ and $(-2, 1)$. (ii) $3\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $(0, 3)$; $(0, 1)$ and $(0, 5)$.

8. (i) Outside. (ii) Inside. **9.** $x+y=5$. **10.** $6\frac{3}{4}$.

11. $(\frac{25}{13}, -\frac{48}{13})$. **12.** $2x-2y=\pm 5$; $(\frac{8}{5}, -\frac{9}{10})$ and $(-\frac{8}{5}, \frac{9}{10})$.

15. 6. **16.** $21x+4y=30$; $-\frac{4}{7}$. **17.** $x=e(y+ae^2)$.

19. $8x-9y=25$. **20.** $7\frac{33}{41}$; $(\frac{75}{41}, \frac{48}{41})$. **21.** $2x+3y=0$.

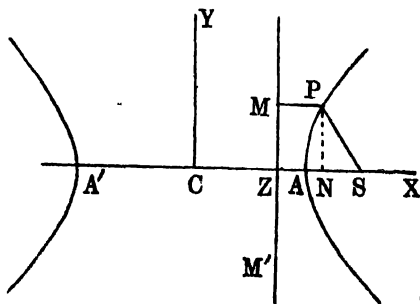
অষ্টম অধ্যায়

পরাবৃত্ত (Hyperbola)

8·1. পরাবৃত্ত (Hyperbola)

একটি চলন্ত বিন্দু যদি কোন সমতলে এরূপভাবে সঞ্চরণ করে যে, ঐ সমতলস্থ নির্দিষ্ট এক বিন্দু এবং নির্দিষ্ট এক সরলরেখা হইতে ইহার দুই দূরত্বের অনুপাত সর্বদা ধ্রুব এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে পরাবৃত্ত বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দু পরাবৃত্তের নাভি, নির্দিষ্ট সরলরেখা ইহার নিয়ামক এবং 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এই অনুপাত ইহার উৎকেন্দ্রতা নামে অভিহিত।

8·2. পরাবৃত্তের আদর্শ সমীকরণ।

মনে কর, পরাবৃত্তের নাভিবিন্দু S, MM′ ইহার নিয়ামক এবং $e(>1)$ ইহার নির্দিষ্ট উৎকেন্দ্রতা।

S বিন্দু হইতে নিয়ামক রেখা MM′ এর উপর SZ লম্ব টান, এবং SZ রেখাকে $e:1$ অনুপাতে A বিন্দুতে অন্তর্বিভক্ত এবং A′ বিন্দুতে বহির্বিভক্ত কর। যেহেতু $e>1$, SA′ > A′Z. সুতরাং, নিয়ামক রেখা MZM′ এর যে পার্শ্বে A অবস্থিত, A′ তাহার বিপরীত পার্শ্বে S বিন্দুর বাম দিকে (উপরের চিত্রের মত) অবস্থিত, অর্থাৎ S বিন্দু A এবং A′ বিন্দু দুইটির মধ্যে অবস্থিত নয়।

মনে কর, AA′ রেখার মধ্যবিন্দু C এবং $AA'=2a$. সুতরাং, $CA=CA'=a$.

এক্ষণে, $SA = e.AZ$ এবং $SA' = e.AZ'$.

সুতরাং, পরাবৃত্তের সংজ্ঞানুসারে, A এবং A′ বিন্দু দুইটি পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত। A এবং A′ বিন্দু দুইটিকে পরাবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু (vertex)** বলা হইয়া থাকে।

আবার, $SA + SA' = e(AZ + A'Z)$

বা, $2CS = e.AA' = e.2CA$, বা, $CS = ae$

এবং $SA' - SA = e(A'Z - AZ)$. বা, $AA' = e.2CZ$,

বা, $2.CA = e.2CZ$, বা, $CZ = \frac{a}{e}$.

মনে কর, C মূলবিন্দু, A′A বরাবর CX রেখা x অক্ষ ও MM′ এর সমান্তরাল এবং AA′ এর লম্ব C বিন্দুগামী CY রেখা y-অক্ষ।

এখন, (x, y) স্থানাঙ্কবিশিষ্ট P বিন্দু পরাবৃত্তের উপর যদি একটি বিন্দু হয় এবং P বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর লম্ব PN ও নিয়ামক রেখা MM′ এর উপর লম্ব PM হয়, তবে $CN = x$, $PM = ZN = CN - CZ = x - \frac{a}{e}$. আবার, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$ $[\because CS = ae]$.

সুতরাং, পরাবৃত্তের ধর্ম অনুযায়ী

$SP = e.PM$ বা, $SP^2 = e^2.PM^2$.

$$\therefore \quad (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2,$$

বা, $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$. [$\because$ এখানে $e > 1$].

বা, $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, যখন $\mathbf{a^2(e^2 - 1) = b^2}$.

পরাবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক এই শর্ত পূরণ করে বলিয়া আদর্শ আকারে ইহাই পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এখানে কেন্দ্র বলিয়া অভিহিত AA′ এর মধ্যবিন্দু C মূলবিন্দু, $CA = CA' = a$ এবং $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

8·3. পরাবৃত্তের আকৃতি এবং মৌলিক ধর্ম।

পরাবৃত্তের $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণ হইতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি লক্ষ্য করা যাইতে পারে।

যদি $y=0$ হয়, $x=\pm a$ হইবে। সুতরাং, পরাবৃত্ত x-অক্ষকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে এবং এই দুই বিন্দুর ভুজাঙ্ক যথাক্রমে a ও $-a$ হইবে।

আবার, $x=0$ হইলে, y^2 ঋণাত্মক হয়, কাজেই y কাল্পনিক। সুতরাং, পরাবৃত্ত y-অক্ষকে মোটেই ছেদ করে না।

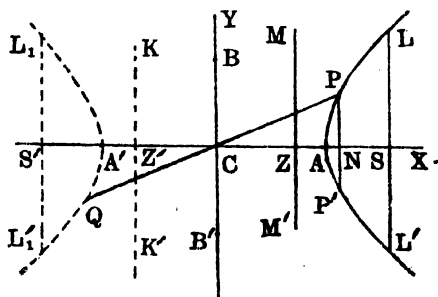
x-এর মান a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা $-a$ অপেক্ষা বৃহত্তর (অর্থাৎ AA′ রেখার মধ্যে অবস্থিত) হইলে, $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1$ ঋণাত্মক হইবে এবং y কাল্পনিক হইবে। সুতরাং, AA′ সীমার মধ্যে পরাবৃত্তের কোন অংশ নাই।

x-এর মান a অপেক্ষা বৃহত্তর অথবা $-a$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, $\frac{x^2}{a^2}>1$ হয়, সুতরাং, $\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1=$ একটি ধনাত্মক রাশি।

∴ y-এর দুইটি সমান ও বিপরীত মান পাওয়া যায়।

অতএব, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ নির্দেশিত পরাবৃত্ত A বিন্দু হইতে দক্ষিণে এবং A′ বিন্দু হইতে বামে প্রসারিত এবং x-অক্ষের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। x-এর মান ক্রমশঃ বর্ধিত হইলে y-এর মানও উত্তরোত্তর বৃদ্ধি পায়।

আবার, y-এর যে-কোনও মান হইলে, $\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y^2}{b^2}=$ একটি ধনাত্মক রাশি।

∴ x-এর দুইটি সমান ও বিপরীত মান পাওয়া যায়।

অতএব, চিত্রে যে রকম দেখানো হইয়াছে সেই রকম দুইটি বিচ্ছিন্ন অংশ লইয়া

পরাবৃত্ত গঠিত এবং A বিন্দু হইতে দক্ষিণে ও A′ বিন্দু হইতে বামে প্রসারিত, এবং x-অক্ষ ও y-অক্ষের উভয় পার্শ্বে ইহা প্রতিসম।

y-অক্ষ CY এর উভয় পার্শ্বে পরাবৃত্তের প্রতিসাম্য হইতে আমরা দেখিতে পাই যে, $CS' = CS$ এবং $CZ' = CZ$ করিয়া C বিন্দুর বাম পার্শ্বে দুইটি বিন্দু লইয়া MZM′ এর সমান্তরাল KZ′K′ যদি অঙ্কন করা যায়, তবে S′ নাভিবিন্দু, KZ′K′ নিয়ামক রেখা ও উৎকেন্দ্রতা e করিয়াও পরাবৃত্তটি অঙ্কন করা যায়।

সুতরাং, C বিন্দুর প্রতিসমরূপে অবস্থিত পরাবৃত্তের দ্বিতীয় এক নাভি S′ ও দ্বিতীয় এক নিয়ামক KZ′K′ আছে।

সর্বশেষে, পরাবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ সিদ্ধ করে, সুতরাং, $(-x_1, -y_1)$ স্থানাঙ্কও এই সমীকরণ সিদ্ধ করিবে। অতএব, P-র কোণাকৃণি বিপরীত বিন্দু Q পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত হইবে এবং PQ রেখা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

∴ C বিন্দুগামী পরাবৃত্তের প্রত্যেক জ্যা C বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত।

সুতরাং, AA′ রেখার মধ্যবিন্দু C (মূলবিন্দুও বটে)-র চতুষ্পার্শে পরাবৃত্ত প্রতিসম। এই কারণে C বিন্দুকে পরাবৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) বলা হয়।

এখানে, x-অক্ষকে **তির্যক্ অক্ষ** (Transverse axis) অভিহিত করা হয়, এবং AA′ এর দৈর্ঘ্য $2a$ কে তির্যক অক্ষের দৈর্ঘ্য বলা হয়। y-অক্ষকে **অনুবন্ধী অক্ষ** (Conjugate axis) এবং এই অক্ষ বরাবর $2b$ পরিমিত এক দৈর্ঘ্য BB′ কে $(CB = CB' = b)$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য বলা হইয়া থাকে।

তির্যক্ অক্ষের লম্ব (অর্থাৎ নিয়ামকের সমান্তরাল) S নাভিবিন্দুগামী LSL′ (অথবা S′ নাভিবিন্দুগামী $L_1S'L'_1$) জ্যা-কে পরাবৃত্তের **নাভিলম্ব** বলা হয়।

CS-এর দৈর্ঘ্য ae বলিয়া নাভিলম্ব LSL′ এর L বা L′ প্রান্তের ভুজ $= ae$. সুতরাং, পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে নাভিলম্বের L বা L′ প্রান্তের কোটি y নিম্ন সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

সুতরাং, $y = \pm b\sqrt{e^2 - 1} = \pm a(e^2 - 1)$.

অতএব, **নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $LL' = 2a(e^2-1) = 2\dfrac{b^2}{a}$.**

$\therefore$ নাভিলম্বার্ধ $= \dfrac{b^2}{a} = a(e^2-1)$.

নাভিলম্বের L প্রান্তের স্থানাঙ্ক $\{ae, a(e^2-1)\}$.

পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা, $b^2 = a^2(e^2-1)$ সমীকরণ হইতে পাই

অর্থাৎ, $\quad e^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2}$.

দ্রষ্টব্য 1. যদি $a=b$ হয়, তবে পরাবৃত্তকে **সমপরাবৃত্ত (rectangular or equilateral hyperbola)** বলে। সমপরাবৃত্তের ক্ষেত্রে উৎকেন্দ্রতা

$$e=\sqrt{2}.$$

দ্রষ্টব্য 2. পরাবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দু P-র নাভিবিন্দুদ্বয় হইতে দূরত্ব SP, S′P.

মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1). S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$.

$$\therefore \quad SP^2 = (x_1-ae)^2 + y_1^2 = (x_1-ae)^2 + b^2\left(\frac{x_1^2}{a^2}-1\right).$$

[পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে]

$$= (x_1-ae)^2 + (e^2-1)(x_1^2-a^2)$$

[$\because \quad b^2 = a^2(e^2-1)$]

$$= e^2x_1^2 - 2x_1ae + a^2 = (ex_1-a)^2.$$

$\therefore \quad$ **$SP = ex_1 - a$,** ইহা SP-র ধনাত্মক মান,

$\because \quad$ এখানে $x_1 > a$ এবং $e > 1$.

অনুরূপভাবে, $\quad$ **$S'P = ex_1 + a$.**

$\therefore \quad S'P - SP = 2a =$ তির্যক্ অক্ষের দৈর্ঘ্য।

ইহা হইতে আমরা পরাবৃত্তের বিশিষ্ট একটি ধর্ম পাই যে, **পরাবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর নাভিবিন্দু দুইটি হইতে দুই দূরত্বের অন্তরফল ধ্রুব এবং তির্যক্ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান।**

8·4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের উপরিস্থ নির্দিষ্ট (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ।

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (i) পরাবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং ইহার সন্নিহিত পরাবৃত্তের উপরিস্থ অপর এক বিন্দু Q এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2).

PQ জ্যার সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad \cdots \qquad \text{(ii)}$$

এক্ষণে উভয় বিন্দু P ও Q পরাবৃত্ত (i) এর উপর অবস্থিত বলিয়া

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(iii)}$$

এবং $$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \text{(iv)}$$

$\therefore$ (iv) হইতে (iii) বিয়োগ করিয়া,

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}-\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0, \quad \text{বা} \quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}.$$

$\therefore$ (ii) সমীকরণে $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ এর এই মান বসাইয়া

$$y-y_1=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}(x-x_1). \qquad \cdots \qquad \text{(v)}$$

এখন, PQ জ্যা-র P বিন্দুকে স্থির রাখিয়া PQ জ্যা এমনভাবে ঘুরাইতে থাক যেন অপর বিন্দু Q ক্রমশঃ P-র নিকটবর্তী হইতে হইতে পরিশেষে P বিন্দুর সহিত একেবারে মিলিয়া যায়। সুতরাং, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2) P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এর সহিত অভিন্ন হইবে এবং সেই ক্ষেত্রে PQ সরলরেখা P বিন্দুতে পরাবৃত্তের স্পর্শকে পরিণত হইবে এবং (v) হইতে উহার সমীকরণ হইবে

$$y-y_1=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1), \quad \text{বা,} \quad \frac{y_1}{b^2}(y-y_1)=\frac{x_1}{a^2}(x-x_1),$$

$$\text{বা,} \quad \frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad \text{[(iii) এর সাহায্যে]}$$

সুতরাং, (i) পরাবৃত্তের উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.}$$

8·5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=$ পর[illegible]ত্তর উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ।

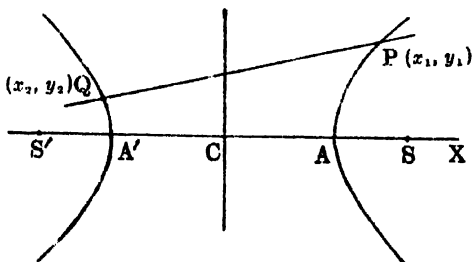
পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$,

$$\text{বা,}\quad y=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\cdot x-\frac{b^2}{y_1} \text{ এবং ইহার } `m' = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

(x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব ঐ বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর লম্ব বলিয়া উহার $`m' = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$.

$$\therefore \text{ অভিলম্বের সমীকরণ } y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

$$\text{বা,}\quad \frac{x-x_1}{x_1} \quad \frac{y-[illegible]}{-y_1}$$

8·6. $y=mx+c$ সরলরেখা কর্তৃক $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য।

পরাবৃত্তের সহিত প্রদত্ত সরলরেখার ছেদবিন্দুতে উভয় সমীকরণ সিদ্ধ হয়। সুতরাং, এই দুই সমীকরণ হইতে y অপনীত করিয়া নিম্নের প্রাপ্ত সমীকরণ হইতে ছেদবিন্দুর ভুজ পাওয়া যায়।

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

$$\text{বা,}\quad (a^2m^2-b^2)x^2+2mca^2x+a^2(b^2+c^2)=0. \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

ইহা x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ হওয়ায় x-এর মাত্র দুইটি মান পাওয়া যাইবে। সুতরাং, পরাবৃত্তের সহিত প্রদত্ত সরলরেখার মাত্র দুইটি ছেদবিন্দু আছে এবং এই দুইটি বিন্দু বাস্তব, অভিন্ন বা কাল্পনিক হইতে পারে।

মনে কর, ঐ দুই ছেদবিন্দু P ও Q এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2); তাহা হইলে x_1 ও x_2 সমীকরণ (i) এর বীজ।

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = -\frac{2mca^2}{a^2m^2 - b^2} \text{ এবং } x_1x_2 = \frac{a^2(b^2+c^2)}{a^2m^2 - b^2}$$

$$\therefore \quad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$$

$$= \frac{4m^2c^2a^4}{(a^2m^2 - b^2)^2} - \frac{4a^2(b^2+c^2)}{a^2m^2 - b^2}$$

$$= \frac{4a^2\{m^2c^2a^2 - (b^2+c^2)(a^2m^2 - b^2)\}}{(a^2m^2 - b^2)^2}$$

$$= \frac{4a^2b^2(c^2 - a^2m^2 + b^2)}{(a^2m^2 - b^2)^2}.$$

আবার, P এবং Q প্রদত্ত রেখা $y = mx + c$ এর উপর অবস্থিত বলিয়া

$y_1 = mx_1 + c, \quad y_2 = mx_2 + c. \quad \therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$

$\therefore$ PQ জ্যা-র দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2(1 + m^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2b^2(c^2 - a^2m^2 + b^2)(1 + m^2)}{(a^2m^2 - b^2)^2}}$$

$$= \frac{\mathbf{2ab\sqrt{1+m^2}\sqrt{c^2 - a^2m^2 + b^2}}}{\mathbf{a^2m^2 - b^2}}$$

অনুসিদ্ধান্ত। স্পর্শক হইবার শর্ত।

প্রদত্ত রেখার সহিত পরাবৃত্তের দুই ছেদবিন্দু যখন একেবারে মিলিয়া যায় অর্থাৎ যখন ছিন্ন জ্যা-র দৈর্ঘ্য 0 হয়, তখন প্রদত্ত রেখা পরাবৃত্ত স্পর্শ করে। সুতরাং, প্রদত্ত রেখা $y = mx + c$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবার শর্ত

$$c^2 - a^2m^2 + b^2 = 0, \quad \text{অর্থাৎ} \quad \mathbf{c = \pm\sqrt{a^2m^2 - b^2}}$$

8·7. m এর যে-কোন মান হইলে $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ রেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবে তাহার প্রমাণ ও স্পর্শবিন্দু নির্ণয়।

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \text{বা,} \quad y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1} \quad \cdots\cdots \quad \text{(i)}$$

যদি $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ ... (ii) সরলরেখা পরাবৃত্তকে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবে (i) ও (ii) সমীকরণ দুইটি অভিন্ন হইবে। সুতরাং, এই দুই সমীকরণের সহগগুলি তুলনা করিলে

$$\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = m \text{ এবং } -\frac{b^2}{y_1} = \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

$$\therefore \quad y_1 = -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}},\ x_1 = \frac{ma^2y_1}{b^2} = -\frac{ma^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}.$$

$\therefore$ কল্পিত বিন্দু (x_1, y_1) যদি $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের উপরিস্থ একটি বাস্তব বিন্দু হয়, তবে (ii) সরলরেখা পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

অর্থাৎ, যদি $\left(-\frac{am}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)^2 - \left(\frac{-b}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)^2 = 1$ হয়,

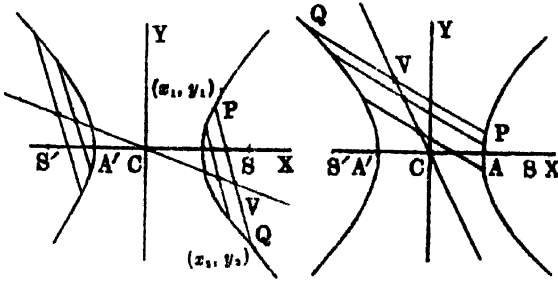
এবং স্পষ্টতঃই ইহা সিদ্ধ।

অতএব, 'm' এর মান যাহাই হউক না কেন, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ রেখা $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) যথাক্রমে

$$\left(-\frac{\mathbf{a^2m}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2 - b^2}}}, -\frac{\mathbf{b^2}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2 - b^2}}}\right).$$

অনুরূপভাবে 'm' এর যে কোন মান হইলে $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ রেখাও $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবে এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right) \text{ হইবে}$$

৪'৪. পরাবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ ; ব্যাস।

মনে কর, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... (i) পরাবৃত্তের এক প্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-র অন্যতম PQ রেখার সমীকরণ $y = mx + c$. ... (ii)

জ্যাগুলি সমান্তরাল বলিয়া সকল জ্যা-র ক্ষেত্রে 'm' অপরিবর্তিত কিন্তু এই প্রস্থের ভিন্ন ভিন্ন জ্যা-র ক্ষেত্রে c-র ভিন্ন ভিন্ন মান হইবে।

(i) এবং (ii) সমীকরণ হইতে y অপনীত করিয়া প্রাপ্ত নিম্ন-সমীকরণ হইতে (i) এবং (ii) এর সাধারণ ছেদবিন্দু দুইটির ভুজ পাওয়া যাইবে।

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1.$$

বা, $(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mcx + a^2(b^2 + c^2) = 0$ ... (iii)

এখন, যদি P এবং Q এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) হয় তবে x_1, x_2 (iii) সমীকরণের বীজ হইবে। অতএব, $x_1 + x_2 = -\frac{2a^2mc}{a^2m^2 - b^2}$.

সুতরাং, PQ এর মধ্যবিন্দু V এর স্থানাঙ্ক যদি (X, Y) হয়,

তবে $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{a^2mc}{a^2m^2 - b^2}$.

আবার, ∵ V (ii) সরলরেখার উপর অবস্থিত, $Y = mX + c$.

∴ c অপনীত করিয়া, $X = \frac{-a^2m(Y - mX)}{a^2m^2 - b^2}$, বা $-b^2X = -a^2mY$,

বা, $Y = \frac{b^2}{a^2m}X$. ইহা c-নিরপেক্ষ হওয়ায় এই প্রস্থ সকল সমান্তরাল জ্যা-র মধ্যবিন্দুর ক্ষেত্রে এই শর্ত প্রযোজ্য।

$\therefore\ mx$ সরলরেখার সমান্তরাল পরাবৃত্তের যাবতীয় জ্যা-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $y = \dfrac{b^2}{a^2m}x.$

ইহা স্পষ্টতঃই মূলবিন্দু অর্থাৎ পরাবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুগামী একটি সরলরেখা। এই সরলরেখা পরাবৃত্তের **ব্যাস** নামে অভিহিত।

'm' এর ভিন্ন ভিন্ন মানের ক্ষেত্রে (অর্থাৎ x-অক্ষের সহিত বিভিন্ন কোণে নত ভিন্ন ভিন্ন প্রস্থ জ্যা-র ক্ষেত্রে) আমরা পরাবৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী বিভিন্ন ব্যাস পাই।

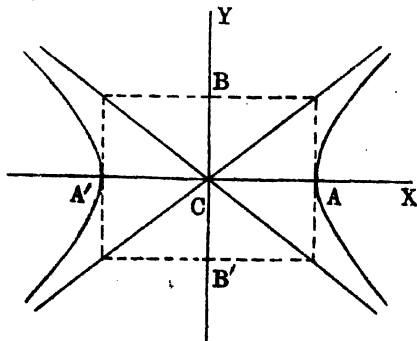
8·9. পরাবৃত্তের অসীম পথ।

আমরা § 8·7 অনুধ্যায়ে দেখিয়াছি যে, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ সরল রেখাটি সর্বদাই $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(-\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\ -\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right).$$

এখন, m-এর মান যদি এরূপভাবে লওয়া যায় যে, $a^2m^2 - b^2 = 0$,

$m = \pm\dfrac{b}{a}$, তবে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্কের মান অসীম হইবে।

$\therefore\ \ y = \pm\dfrac{b}{a}x$ উভয় সরলরেখাই $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক, এবং স্পর্শবিন্দু অসীম দূরবর্তী। এই রেখাদ্বয়কে পরাবৃত্তের **অসীম পথ** বলা হয়।

উহারা তির্যক্ অক্ষের সহিত θ কোণে নত, যখন $\tan\theta = \pm\ (b/a)$.

সুতরাং, মূলবিন্দুকে কেন্দ্র এবং তির্যক্ অক্ষ $2a$-র সমান এক বাহু, অনুবন্ধী অক্ষ $2b$-র সমান অপর বাহু লইয়া দুই অক্ষের সমান্তরাল বাহু করিয়া যদি একটি

আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করা যায়, তবে এই আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরাবৃত্তের অসীম পথ হইবে এবং এই দুই রেখা ক্রমাগত পরাবৃত্তের নিকটবর্তী হইতে হইতে অসীমে গিয়া পরাবৃত্তের স্পর্শকে পরিণত হইবে।

বিশেষ ক্ষেত্রে যখন $a=b$ হয়, তখন অসীম পথ দুইটি x-অক্ষের সহিত $\pm 45°$ কোণে নত হয়। সুতরাং, দুইটি অসীম পথ পরস্পর লম্ব হয়। যেস্থলে পরাবৃত্তের তির্যক্ অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ সমান, সেই স্থলে পরাবৃত্তকে সমপরাবৃত্ত বলা হয় এবং ইহার অসীম পথ দুইটি পরস্পর সমকোণে নত।

8·10. উদাহরণাবলী।

Ex. 1. *The co-ordinates of the foci of a hyperbola are* $(-5, 3)$ *and* $(7, 3)$, *and its eccentricity is* $\frac{3}{2}$. *Find its equation and determine the length of its latus rectum.*

মনে কর, $S(7, 3)$ এবং $S'(-5, 3)$ পরাবৃত্তের দুই নাভি, এবং উৎকেন্দ্রতা $=\frac{3}{2}$. $2a$ যদি পরাবৃত্তের তির্যক্ অক্ষের দৈর্ঘ্য হয়, তবে

$$SS'=2ae, \quad \text{বা,} \quad 12=2a.\tfrac{3}{2}. \quad \therefore \quad a=4.$$

আবার, অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য যদি $2b$ হয়, তবে

$$b^2=a^2(e^2-1)=16(\tfrac{9}{4}-1)=20.$$

$$\therefore \quad \text{নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য}=2\cdot\frac{b^2}{a}=2.\tfrac{20}{4}=10.$$

আবার, SS' এর মধ্যবিন্দু C পরাবৃত্তের কেন্দ্র এবং ইহার স্থানাঙ্ক

$$\tfrac{1}{2}(7-5) \text{ এবং } \tfrac{1}{2}(3+3) \text{ অর্থাৎ } (1, 3).$$

এবং SS' রেখা বরাবর তির্যক্ অক্ষের সমীকরণ

$$(y-3)(7+5)+(x-7)(3-3)=0 \text{ অর্থাৎ } y=3.$$

$\therefore$ ইহা x-অক্ষের সমান্তরাল।

এক্ষণে C কে মূলবিন্দু ধরিয়া এবং তির্যক্ অক্ষকে x-অক্ষ ধরিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1$ $\quad [\because a^2=16 \text{ এবং } b^2=20]$.

সুতরাং, প্রদত্ত অক্ষের হিসাবে উপরিউক্ত পরাবৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু C-র স্থানাঙ্ক $(1, 3)$ এবং ইহার তির্যক্ অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ প্রদত্ত অক্ষের সমান্তরাল। প্রদত্ত অক্ষদ্বয় অনুসারে পরাবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ

$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{20}=1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

বিকল্প প্রণালী।

এখানে পরাবৃত্তের তির্যক্ অক্ষ $= 2a = 8$.

আবার, পরাবৃত্তের উপরে অবস্থিত কোন বিন্দুর নাভিকেন্দ্র হইতে দুই দূরত্বের অন্তরফল পরাবৃত্তের তির্যক্ অক্ষের সমান। এক্ষণে, পরাবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (x, y) হয়, তবে

$$\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} \sim \sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2} = 8$$

বা, $\sqrt{(x+5)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2} \pm 8.$

বর্গকরণান্তর পক্ষান্তর করিয়া,

$$24x - 88 = \pm 16\sqrt{(x-7)^2+(y-3)^2}$$

বা, $(3x-11)^2 = 4\{(x-7)^2+(y-3)^2\}.$

বা, $5x^2 - 4y^2 - 10x + 24y - 111 = 0.$

ইহাই পরাবৃত্তের নির্ণেয় সমীকরণ এবং উপরে প্রাপ্ত (i) সমীকরণ হইতে ইহা অভিন্ন।

Ex. 2. *Prove that the tangent to the hyperbola $x^2 - 3y^2 = 12$ at the point $(-6, 2\sqrt{2})$ bisects the angle between the focal distances of the point.*

পরাবৃত্তের প্রদত্ত সমীকরণটি নিম্নের আকারে লেখা যায়

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

অতএব, ইহার নাভিদ্বয় S এবং S′ এর স্থানাঙ্ক $(\pm\sqrt{12+4}, 0)$ অর্থাৎ $(\pm 4, 0)$ সহজেই স্থির করা যায়।

পরাবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-6, 2\sqrt{2})$.

সুতরাং, SP রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{-6-4}(x-4)$

অর্থাৎ $x\sqrt{2} + 5y - 4\sqrt{2} = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$

এবং S′P রেখার সমীকরণ $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{-6+4}(x+4)$

অর্থাৎ $x\sqrt{2} + y + 4\sqrt{2} = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$

$\angle SPS'$ এর মধ্যে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং $\angle SPS'$ এর অর্থাৎ, (ii) ও (iii) এর মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখার সমীকরণ

$$\frac{x\sqrt{2}+5y-4\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+25}=\frac{x\sqrt{2}+y+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1},$$

বা, $x\sqrt{2}+5y-4\sqrt{2}+3(x\sqrt{2}+y+4\sqrt{2})=0,$

বা, $x+\sqrt{2}y+2=0.$ ... ... (iv)

আবার, (i) পরাবৃত্তের $(-6, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x(-6)}{12}-\frac{y(2\sqrt{2})}{4}=1,$$

বা, $x+\sqrt{2}y+2=0$, ইহা (iv) হইতে অভিন্ন।

∴ প্রদত্ত পরাবৃত্তের উপরিস্থ $P(-6, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শক পরাবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে বিন্দুটির দূরত্ব-নির্দেশক SP ও S′P রেখা দুইটির মধ্যবর্তী $\angle SPS'$ সমদ্বিখণ্ডিত করে।

Ex. 3. *Find the length of the chord of the hyperbola $x^2-4y^2=9$ along the straight line $x+4y+3=0$, and determine the co-ordinates of its middle point.*

পরাবৃত্ত $x^2-4y^2=9$ .... (i) এবং সরলরেখা $x+4y+3=0$ .... (ii) এর ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি এই দুই সমীকরণ হইতে x অপনীত করিয়া প্রাপ্ত নিম্ন সমীকরণের বীজ।

$(4y+3)^2-4y^2=9$, বা $y(y+2)=0$. ∴ $y=0$ বা -2.

y-এর এই মান (ii) সমীকরণে বসাইয়া $x=-3$ বা 5.

সুতরাং, জ্যা-র দুই প্রান্তবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, 0)$ এবং $(5, -2)$,

অতএব, জ্যা-র দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-3-5)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{17}.$

এবং ইহার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\frac{1}{2}(-3+5), \frac{1}{2}(0-2)$ অর্থাৎ $(1, -1)$.

Ex. 4. *Prove that the portion of the tangent at any point of a hyperbola intercepted between the asymptotes is* ***bisected*** *at the point of contact.*

মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ .... (i) ইহার অসীম পথ দুইটির সমীকরণ $y=\frac{b}{a}x$ .... (ii) এবং $y=-\frac{b}{a}x$. ... (iii)

(i) পরাবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দু $P(x', y')$ তে স্পর্শক

$$\frac{xx'}{a^2}-\frac{yy'}{b^2}=1. \quad \ldots \quad \text{.... (iv)}$$

এই স্পর্শক যদি (ii) সরলরেখাকে Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে (ii) ও (iv) সমীকরণের মধ্যে y অপনীত করিলে Q এর ভুজ পাওয়া যায়।

$$\frac{xx'}{a^2} - \frac{y'}{b^2} \cdot \frac{b}{a} x = 1, \text{ বা } x = \frac{a}{\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}}.$$

অনুরূপভাবে (iv) ও (iii) রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু

$$\text{R এর ভুজ } x = \frac{a}{\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}}.$$

অতএব, QR এর মধ্যবিন্দুর ভুজ

$$\frac{1}{2}\left[\frac{a}{\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}} + \frac{a}{\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b}}\right] = \frac{x'}{\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}} = x'.$$

অনুরূপভাবে QR এর মধ্যবিন্দুর কোটি y'. সুতরাং P, QR এর মধ্যবিন্দু।

Examples VIII

1. Obtain the equation to the hyperbola whose focus is $(a, 0)$, directrix is the straight line $x = \frac{1}{2}a$, and eccentricity is $\sqrt{2}$. [*H. S. 1960*]

2. Find the equation to the hyperbola referred to its axes as axes of co-ordinates,

(i) whose eccentricity is $\sqrt{2}$, and distance between its foci 16.

(ii) whose latus rectum is $10\frac{2}{3}$ and distance between focus and directrix is $3\frac{1}{5}$.

3. In the hyperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$, find the lengths of the axes, the co-ordinates of the foci, the eccentricity and the length of the latus rectum. [*H. S. 1961*

4. A point moves on the plane of the co-ordinate axes so that the difference of its distances from the points $(\pm 3, 0)$

is always 4. Prove that it traces out a hyperbola whose eccentricity and length of latus rectum you are to determine.

5. By transfering the origin suitably, show that the equation $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$ represents a hyperbola, and determine its eccentricity, co-ordinates of its foci and equations to the directrices.

6. Find the co-ordinates of the foci of the hyperbola $x^2 - y^2 = 9$. Also find the distance from the origin of the point where the tangent to the above hyperbola at (5, 4) meets the x-axis. [*H. S. 1960, Compartmental*]

7. Show that the tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ at each of the points (i) $(-5, \frac{9}{4})$, (ii) $(8, -3\sqrt{3})$ bisects the angle between the focal distances of the corresponding point.

8. Find the length intercepted on the conjugate axis between the tangents at the two extremities of a latus rectum of the hyperbola $7x^2 - 9y^2 = 63$.

9. (i) Find the points on the hyperbola $3x^2 - 5y^2 = 15$ at which the tangents are inclined at $60°$ to the x-axis.

(ii) Find the tangents perpendicular to $x + 2y = 0$ of the hyperbola $7x^2 - 4y^2 = 28$, and find the points of contact.

10. Prove that the locus of the point of intersection of any two perpendicular tangents to a hyperbola is a circle.

11. Find the equation to the normal to the hyperbola $16x^2 - 25y^2 = 31$ at the point whose ordinate is -3 and abscissa positive.

12. In the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$, show that

(i) the intercept on the x-axis of the normal at any point is double the abscissa of the point.

(ii) the length of the normal at any point intercepted between the axes is bisected at the point.

13. Obtain the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$, passing through the origin and making equal angles with the axes. [*H. S. 1960, Compartmental*]

14. Find the equation to the chord of the hyperbola $x^2-2y^2=1$ which is bisected at the point $(-3,\ -1)$.

15. Find the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ along the line $3x+2y=12$.

16. Find the equation to the diameter of the hyperbola $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ bisecting all chords parallel to $x-2y+7=0$.

17. If P be a point on a rectangular hyperbola, prove that

$$SP.S'P=CP^2.$$

18. The normal at any point of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ meets the axes in M and N, and lines MP and NP are drawn at right angles to the axes; prove that the locus of P is the hyperbola

$$a^2x^2-b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

ANSWERS

1. $2x^2-2y^2=a^2$. **2.** (i) $x^2-y^2=32$. (ii) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

3. 6, 4; $(\pm\sqrt{13}, 0)$; $\frac{1}{3}\sqrt{13}$; $2\frac{2}{3}$. **4.** $\frac{3}{2}$, 5.

5. $\frac{3}{2}$; (5, −1) and (−1, −1); $x=3\frac{1}{3}$ and $x=\frac{2}{3}$. **6.** $(\pm 3\sqrt{2}, 0)$; $1\frac{1}{3}$.

8. 6. **9.** (i) $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ and $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(ii) $y=2x\pm 3$; $(\frac{8}{3}, \frac{7}{3})$ and $(-\frac{8}{3}, -\frac{7}{3})$.

11. $75x-64y=492$. **13.** $\frac{15}{2}\sqrt{2}$. **14.** $3x-2y+7=0$.

15. $\frac{4}{3}\sqrt{13}$. **16.** $5x-2y=0$.

BOARD OF SECONDARY EDUCATION W. B.

Higher Secondary Examination Papers (Paper II)

1960

1. (*a*) Prove that in any triangle, the square on the side opposite to an acute angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the acute angle, diminished by twice the rectangle contained by one of these sides and the projection on it of the other side.

(*b*) Prove that three times the sum of the squares on the sides of a triangle is equal to four times the sum of the squares on the medians.

(*c*) Prove that the internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle.

(*d*) A straight line AB is divided in a given ratio internally at C and externally at D. If P be a point where CD subtends a right angle, prove that PC bisects the angle APB.

2. (*a*) Show that the angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternate segment of the circle.

(*b*) ABC is a triangle inscribed in a circle; AD, AE are lines drawn to the base BC parallel to the tangents at B, C respectively; prove that $BD : CE = AB^2 : AC^2$.

Or,

(*b*) Tangents AB, AC are drawn to a circle; CE is perpendicular to the diameter BD through B; prove that AD bisects CE.

3. Draw an equilateral triangle, each side of which is 2 inches. Now proceed to construct a square equal in area to this triangle.

Or,

Draw two circles of radii 4 cms. and 2·5 cms. respectively, with their centres at a distance 10 cms. apart. Proceed to construct a transverse common tangent to the two circles.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. (*a*) Obtain the co-ordinates of the point which divides the straight line joining the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) internally in the ratio $m_1 : m_2$.

(*b*) If A, B, C, D are points whose co-ordinates are (—2, 3), (8, 9), (0, 4) and (3, 0) respectively, and AB and CD are joined; find the ratio of the segments into which AB is divided by CD.

(*c*) Obtain the equation of the straight line whose intercepts on the axes OX, OY are a and b respectively.

(*d*) Determine the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines given by $3x-4y+1=0$ and $5x+y=1$, and has equal intercepts of the same sign on the axes.

5. (*a*) Find the length of the chord of a circle $x^2+y^2=64$, intercepted on the straight line $3x+4y-c=0$.

(*b*) Obtain the co-ordinates of the point of contact of any one of the two tangents to the above circle $x^2+y^2=64$, parallel to the line $3x+4y-c=0$.

(*c*) Find out the eccentricity, and the co-ordinates of the foci of the ellipse $9x^2+25y^2=225$.

(*d*) Find the distance from the origin of the point where the tangent at the extremity of a latus rectum of the above ellipse $9x^2+25y^2=225$, intersects the major axis.

6. (*a*) Find out the equation of the tangent to the parabola $y^2=4ax$ at the extremity of the latus rectum.

(*b*) A double ordinate of the parabola $y^2=4ax$ is of length $8a$. Prove that the lines joining the vertex to its two ends are at right angles.

(*c*) Obtain the equation to the hyperbola whose focus is $(a, 0)$, directrix is the straight line $x=\frac{1}{2}a$, and eccentricity is $\sqrt{2}$.

(*d*) A rod of length 6 units slides with its extremities always on the co-ordinate axes. Prove that its middle point traces out a circle, whose equation you are to determine.

7. (*a*) A thick hollow cylindrical pipe is 6 inches in length, and its whole surface (outer and inner curved surfaces and the plane edges) is 308 sq. inches. If the external diameter of the pipe is 8 inches, and if its material weighs 4 ozs. per cubic inch, find its weight. [Take $\pi=\frac{22}{7}$]

(*b*) When is (i) a straight line, (ii) a plane said to be perpendicular to a given plane?

If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their intersection, prove that it is perpendicular to the plane containing them.

(*c*) Prove that in any triangle, the middle points of the sides and the middle points of the lines joining the orthocentre to the vertices lie on a circle.

Prove also that the distance of the orthocentre from any angular point of the triangle is double of the distance of the circum-centre from the opposite side.

(*d*) Obtain the co-ordinates of the centre of the circle passing through the points (1, 2), (3, —4), (5, —6), and determine the length of its diameter.

Is the origin inside, or outside the circle?

1960 (Compartmental)

1. (*a*) If two triangles are equiangular, prove that their corresponding sides are proportional.

(*b*) Prove that the line drawn parallel to the parallel sides of a trapezium through the point of intersection of the diagonals is bisected at the point.

(*c*) Prove that in a triangle the sum of the squares on any two sides is equal to twice the square on half the third side together with twice the square on the median that bisects the third side.

(*d*) Show that the sum of the squares on the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares on the diagonals.

2. (*a*) If two chords of a circle intersect outside the circle, prove that the rectangle contained by the segments of one is equal to the rectangle contained by the segments of the other.

(*b*) Prove that if the common chord of two intersecting circles be produced, it will bisect their common tangent.

Or,

ABC is a triangle right-angled at A; AD is perpendicular to BC. Shew that $AB^2 = BD.BC$.

3. Draw a circle of radius 2 cms. Construct an equilateral triangle circumscribing this circle.

Or,

Draw a triangle with sides 3, 4 and 5 cms. Now construct a square equal in area to this triangle.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. (*a*) Find the distance between the points whose co-ordinates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Prove that the points whose co-ordinates are (—2, —2), (2, 2) and (4, —4) are the vertices of an isosceles triangle.

(*c*) Find the angle between the straight lines whose equations are $y = m_1x + c_1$ and $m_2x + c_2$.

(*d*) Obtain the equation to the straight line passing through the point (—1, 2) and perpendicular to the line $3x + 4y = 5$.

5. (*a*) Obtain the equation to a circle having its centre at (3, 7) and radius 5.

(*b*) Find the equation of the tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$ at any point (x_1, y_1) on it.

(*c*) Find the equation to the tangent of the ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ at the point } (x_1, y_1) \text{ on it.}$$

(*d*) Show that $x-3y=13$ touches the ellipse

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

6. (*a*) Find the equation to the normal at (x_1, y_1) of the parabola $y^2=4ax$.

(*b*) Prove that the length intercepted on the x-axis of the parabola $y^2=4ax$, between the foot of the ordinate of any point of it and the point of intersection of the normal at that point with the x-axis is constant.

(*c*) Obtain the length of the chord of the hyperbola

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1.$$

passing through the origin and making equal angles with the axes.

(*d*) Find the co-ordinates of the foci of the hyperbola $x^2-y^2=9$.

7. (*a*) Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point of it are coplanar.

(*b*) The volume of a right circular cone whose height is 24 inches is 1232 c. ins. Find the area of its slant surface. [$\pi=\frac{22}{7}$]

(*c*) AB is a diameter of a circle; AC and AD are any two chords cutting the tangent at B in P and Q; prove that $\angle$PCQ $=\angle$PDQ.

(*d*) A straight line is drawn through the point (3, 5) such that the point bisects the portion of the line intercepted between the axes. Find the equation to the line, and calculate its perpendicular distance from the origin.

1961

1. (*a*) If two triangles have one angle of the one equal to one angle of the other and the sides about these equal angles proportional, prove that the triangles are similar.

(*b*) If two triangles are similar, prove that their areas are proportional to the squares on their corresponding medians.

(*c*) Prove that the ratio of the areas of similar triangles is equal to the ratio of the squares on their corresponding sides.

(*d*) If ABC be a triangle inscribed in a circle, and the tangent at A meets BC produced in D, prove that BD : CD $=$ AB^2 : AC^2.

2. (*a*) If from a point outside a circle, a secant and a tangent be drawn to the circle, prove that the rectangle contained by the segments of the secant is equal to the square on the tangent.

(*b*) If the diagonals of a cyclic quadrilateral are at right angles, show that the perpendicular from the point of intersection to any side when produced backwards bisects the opposite side.

Or,

(*b*) From the extremities of any chord AB of a circle, perpendiculars AQ, BR are drawn to the tangent to the circle at any point P. If PM is perpendicular to AB, prove that $PM^2 = AQ.BR$.

3. Draw a circle of radius 1 inch, and then construct a regular hexagon circumscribing the circle.

Or,

Take a straight line of length 2 inches and divide it into two parts such that the square on one part may be double the square on the other part.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. (*a*) Obtain the area of the triangle whose vertices are the points (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3).

(*b*) Find the area of the triangle whose vertices A, B, C are respectively (3, 4), (—4, 3) and 8, —6); hence or otherwise find the length of the perpendicular from A on BC.

(*c*) Obtain the equation of the straight line passing through the points (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*d*) Find the equation to the perpendicular bisector of the line joining the points (—2, 7) and (8, —1). *At what distance is this perpendicular-bisector from the origin?*

5. (*a*) Obtain the equation to *the circle passing through the points* (3, 4), (3, —6), (—1, 2) and determine its centre and radius.

(*b*) Prove that the straight line $y = x + a\sqrt{2}$ touches the circle $x^2 + y^2 = a^2$, and find its point of contact.

(*c*) Obtain the equation to the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at the point (x_1, y_1) on the ellipse.

(*d*) Find the equation to the tangent of the ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ having equal positive intercepts on the axes.

6. (*a*) Find out the equation to the parabola whose focus is $(-3, 4)$ and directrix is $6x-7y+5=0$.

(*b*) The two tangents drawn from a point P to the parabola $y^2=4x$ are at right angles. Find the locus of P.

(*c*) In the hyperbola $4x^2-9y^2=36$, find the lengths of the axes, the co-ordinates of the foci, the eccentricity and the length of the latus rectum.

(*d*) Find the condition that $y=mx+c$ may touch the hyperbola $x^2-y^2=a^2$.

7. (*a*) A and B are two fixed points whose co-ordinates are $(2, 4)$ and $(2, 6)$ respectively; ABP is an equilateral triangle on the side of AB opposite to the origin. Find the co-ordinates of P.

(*b*) B and C are fixed points having co-ordinates $(3, 0)$ and $(-3, 0)$ respectively. If the vertical angle BAC be $90°$, show that the locus of the centroid of the triangle ABC is a circle whose equation you are to determine.

(*c*) With the material of a hollow sphere of outer diameter 10 cms. and thickness 2 cms. is made a solid right circular cone of height 8 cms. Find the surface area of its curved surface to the nearest square centimetre. [$\pi = \frac{22}{7}$]

(*d*) How is the angle between two intersecting planes defined? When is a plane perpendicular to another plane?

If two straight lines are parallel, and if one of them is perpendicular to a plane, prove that the other is also perpendicular to the same plane.

1961 (Compartmental)

1. (*a*) Prove that the bisector of the exterior angle of a triangle divides the opposite side externally in the ratio of the other two sides.

(*b*) In a quadrilateral, if the bisectors of one pair of opposite angles meet on one diagonal, prove that the bisectors of the other pair of opposite angles will meet on the other diagonal.

(*c*) If a perpendicular is drawn from the right angle of a right-angled triangle to the hypotenuse, prove that the triangle on each side of the perpendicular are similar to one another. Hence deduce that the perpendicular is a mean proportional between the segments of the hypotenuse.

(*d*) In a right-angled triangle, if a perpendicular is drawn from the right angle to the hypotenuse, show that the segments of the hypotenuse have the same ratio as the squares on the sides containing the right angle.

2. (*a*) Prove that the obtuse angle between the tangent at a point of a circle and a chord through the point of contact is equal to the angle in the alternate segment.

Or,

If from any point on the circumcircle of a triangle perpendiculars are drawn to the sides of the triangle, prove that the feet of the perpendiculars are collinear.

(*b*) If two circles intersect, show that their common tangent subtends supplementary angles at the points of intersection.

Or,

Two radii of a circle are perpendicular to each other, and a tangent cuts them when produced; prove that the other tangents drawn to the circle from these points of intersection are parallel.

3. Take a straight line of length 6 cms; divide it into two segments such that the rectangle contained by the segments may be equal to a square on a side of length 2 cms.

Or,

Draw a circle of radius 1 inch. Find out a point outside this circle such that the two tangents from it to the circle, and the line joining the points of contact may form an equilateral triangle.

[*Statement of construction, and full, neat and distinct traces are to be given in either case, but no proof.*]

4. (*a*) Obtain the distance between the points whose rectangular Cartesian co-ordinates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Show that the triangle whose vertices are the points $(-2, -5)$, $(4, -1)$ and $(-1, 0)$ is isosceles.

(*c*) Obtain the equation to a straight line which is inclined to the x-axis at an angle θ, and whose intercept on the y-axis is c.

(*d*) Show that the points $(1, 4)$, $(3, -2)$ and $(-3, 16)$ are collinear.

5. (*a*) The extremities of a diameter of a circle have co-ordinates $(-4, 3)$ and $(12, -1)$; find the equation to the circle.

(*b*) Find the condition that the straight line $y = mx + c$ may touch the circle $x^2 + y^2 = a^2$.

(*c*) An ellipse has its major axis along the x-axis and the minor axis along the y-axis. Its eccentricity is $\frac{1}{2}$ and the distance between the foci is 4. Find its equation and show that the ellipse passes through the point $(2, 3)$.

(*d*) Find the equation to the tangent at the point (x_1, y_1) of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. (*a*) Show that the straight line $y = mx + \frac{a}{m}$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$, whatever m may be.

(*b*) Show that the foot of the perpendicular from the focus of the parabola $y^2 = 4ax$ on any tangent lies on the y-axis.

(*c*) Prove that in the hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$, the difference between the focal distances of any point on it is constant.

(*d*) Find the length of the chord of the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ along the line $y = mx$.

7. (*a*) A and B are two fixed points on a plane, and a point P moves on the plane in such a way that PA = 2PB always. Prove either geometrically or analytically that the locus of P is a circle.

(*b*) OA, OB, OC are three straight lines on a plane. If OP be perpendicular to OA and OB, prove that it is perpendicular to OC also.

(*c*) A solid right circular cylinder, whose height is 9 inches and diameter of the base 4 inches, is deformed into a sphere. Find the surface area of this sphere.

(*d*) Find the equation of the straight line which passes through the intersection of the lines $3x - 7y + 5 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$ and has equal intercepts of the same sign along the axes.

1962

GROUP A

1. (*a*) Prove that in an obtuse-angled triangle, the square on the side subtending the obtuse angle is equal to the sum of the squares on the sides containing the obtuse angle, together with twice the rectangle contained by one of these sides and the projection of the other side on it.

(*b*) Prove that the sum of the squares on the sides of a parallelogram is equal to the sum of the squares on its diagonals.

2. (*a*) If two chords of a circle intersect inside the circle, prove that the rectangle contained by the parts of one, is equal to the rectangle contained by the parts of the other.

(*b*) Through any point X on the common chord of two interesting circles, chords AB and CD are drawn one in each circle. Prove that AX.XB = CX.XD.

3. (*a*) Prove that if two triangles are equiangular their corresponding sides are proportional.

(*b*) In the trapezium ABCD, AB is parallel to DC, and the diagonals intersect at O. Show that OA : OC = OB : OD.

4. (*a*) Prove that the internal bisector of an angle of a triangle divides the opposite side internally in the ratio of the sides containing the angle.

(*b*) AD is a median of the triangle ABC, and the angles ADB, ADC are bisected by lines which meet AB, AC at E and F respectively. Show that EF is parallel to BC.

5. Construct a regular hexagon circumscribing a circle of radius 1·5 inches. Measure a side of the hexagon.

[*Statement of construction as well as justification, are to be given.*]

GROUP B

6. (*a*) Find the co-ordinates of the point which divides in a given ratio $m_1 : m_2$ internally, the line joining two given points (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) The co-ordinates of the vertices of a triangle are (x_1, y_1), (x_2, y_2) and (x_3, y_3). Find co-ordinates of the point where the medians of the triangle intersect.

7. (*a*) Find the angle between the straight lines whose equations are $y = m_1x + c_1$ and $y = m_2x + c_2$.

(*b*) Find the equation of the straight line passing through the point $(-3, 1)$ and perpendicular to the line $5x - 2y + 7 = 0$.

8. (*a*) Find the equation of the circle passing through the origin which makes intercepts 6 and 8 on the positive sides of the axes of x and y respectively.

(*b*) Prove that the centres of the three circles

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = -1$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 12y = 9$$
$$\text{and } x^2 + y^2 - 16 = 0$$

lie on a straight line.

9. (*a*) Find the equation of the parabola whose focus is at the point $(5, 0)$ and whose directrix is the line $3x - 4y + 2 = 0$.

(*b*) Show that the straight line $y = mx + \frac{a}{m}$ is a tangent to the parabola $y^2 = 4ax$.

10. (*a*) Find the equation of the ellipse whose major and minor axes lie along the axes of co-ordinates OX, OY respectively and whose eccentricity is $\frac{1}{\sqrt{2}}$ and latus rectum 3.

(*b*) Show that the line $x - y = 5$ touches the ellipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

GROUP C

11. Prove that all straight lines drawn perpendicular to a given straight line at a given point are coplanar.

12. If a right angle rotates about one of its arms, prove that the other arm describes a plane.

13. Find the volume and the lateral surface of a right prism 8 inches long, standing on an isosceles triangle, each of whose equal sides is 5 inches and the other side 6 inches.

14. A right pyramid stands on a rectangular base whose sides are 12 inches and 9 inches; and the length of each of the slant edges is 8·5 inches. Find the height and the volume of the pyramid.

1963

GROUP A

1. (*a*) If two triangles have their sides proportional, when taken in order, prove that they are equiangular.

(*b*) Prove that the areas of two similar triangles are proportional to the squares on their circum-radii.

2. (*a*) If the base of a triangle be divided externally in the ratio of the other two sides, prove that the line joining the vertex to this point of division bisects the vertical angle externally.

(*b*) Prove that the external bisectors of two angles and the internal bisector of the third angle of a triangle are concurrent.

3. (*a*) Show that the acute angle made by a tangent to a circle with a chord drawn from the point of contact is equal to the angle in the alternate segment of the circle.

(*b*) Two circles intersect at A and B, and through P, any point on one of them, straight lines PAC and PBD are drawn to cut the other at C and D. Show that CD is parallel to the tangent at P.

4. Construct, to the scale, an isosceles triangle with each of the equal sides equal to 2 inches, and each base angle double the vertical angle.

Or,

Divide a straight line of length 2 inches into two parts, such that the square on one part may be three times the square on the other.

[*Statement of construction and full neat traces are to be given in any one of the above cases, but no proof.*]

GROUP B

5. (*a*) Obtain the distance between two points whose rectangular Cartesian co-ordinates are (x_1, y_1) and (x_2, y_2).

(*b*) Prove that three times the sum of the squares on the side of a the successive angular points of a rectangule.

6. (*a*) Obtain the perpendiculor distance from the point (x_1, y_1) to the straight line $ax+by+c=0$.

(*b*) Find the orthocentre of the triangle whose angular points are (2, 7), (−6, 1) and (4, −5)

7. (*a*) Find the equation to the tangent at (x_1, y_1) of the circle

$$x^2+y^2=a^2.$$

(*b*) Obtain the equation to the circle which passes through the point (0, 4) and touches the x-axis at the point (2, 0).

8. (*a*) A tangent to the parabola $y^2=12x$ makes an angle 45° to the axis. Find the co-ordinates of its point of contact.

(*b*) The co-ordinates of the foci of a hyperbola are (5, 0) and (−5, 0), and its eccentricity is $\frac{5}{4}$. Find its equation.

9. (*a*) Show that the locus of the middle points of a system of parallel chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ is a straight line passing through its centre.

(*b*) Find the equation to the normal to the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ at an extremity of a latus rectum.

GROUP C

10. (*a*) If a straight line is perpendicular to each of two intersecting straight lines at their point of intersection, prove that is it perpendicular to the plane in which they lie.

(*b*) If PA = PB = PC, where P is a point outside the plane of the triangle ABC, and if PO be drawn perpendicular to the plane, prove that O is the circum-centre of the triangle ABC.

(*c*) If two straight lines are both perpendicular to a plane, show that they are parallel.

(*d*) If the middle points of the adjacent sides of a skew quadrilateral are joined, prove that the figure so formed is a parallelogram.

11. A right circular cylinder and a right circular cone have equal bases and equal heights. If their curved surfaces are in the ratio 8 : 5, show that the radius of the base is to the height as 3 : 4.

Or,

A sphere of diameter 6 cms. is dropped into a cylindrical vessel partly filled with water. The diameter of the vessel is 12 cms. If the sphere be completely submerged, by how much will the surface of the water be raised?